

CLASSIFICAZIONE DELLE SUPERFICI TOPOLOGICHE

E. Sernesi

1 Poligoni etichettati

Denoteremo con il simbolo P_{2n} , o semplicemente con P , un poligono compatto e convesso di \mathbb{R}^2 , a $2n$ lati, $n \geq 2$. Considereremo superfici topologiche ottenute come spazi quoziente di P attraverso opportune identificazioni dei lati tra loro a coppie, nel modo che ora descriveremo.

Fissato un vertice v , ed un verso di percorrenza della frontiera di P (il verso orario per fissare le idee), consideriamo simboli a_1, \dots, a_n , ed un monomio in a_1, \dots, a_n con esponenti ± 1 , in cui ogni a_i compaia esattamente due volte:

$$a_{i_1}^{\pm 1} a_{i_2}^{\pm 1} \cdots a_{i_{2n}}^{\pm 1} \quad (1)$$

A questo monomio corrisponde una “etichettatura” con un simbolo a_i di ognuno dei $2n$ lati (il k -esimo lato che si incontra percorrendo $\mathcal{F}P$ a partire da v si etichetta con il simbolo a_{i_k}). ed una orientazione di ognuno di essi che è concorde o discorde con il verso di percorrenza di $\mathcal{F}P$ a seconda che l'esponente sia $+1$ oppure -1 . In questo modo ad ogni lato è assegnato lo stesso simbolo di uno ed un solo altro lato, ed esiste un unico omeomorfismo lineare tra i due lati che rispetta le orientazioni indotte su di essi dal monomio (1). Questi omeomorfismi tra i lati di P a coppie inducono una relazione di equivalenza su P : lo spazio quoziente S è, per motivi elementari la cui verifica è lasciata al lettore, una superficie topologica compatta e connessa che verrà denotata con lo stesso simbolo (1).

Ad esempio, nel caso $2n = 4$, la superficie $a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1}$ è omeomorfa al toro $T = S^1 \times S^1$.

La superficie $a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1} a_3 a_4 a_3^{-1} a_4^{-1}$ è detta *2-toro* e denotata $2T$.

Più in generale, per ogni intero $g \geq 1$ la superficie

$$a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1} a_3 a_4 a_3^{-1} a_4^{-1} \cdots a_{2g-1} a_{2g} a_{2g-1}^{-1} a_{2g}^{-1}$$

quoziente di un poligono P_{4g} , si denota con il simbolo gT , ed è chiamata *multitopo di genere g* o *g -toro*. Alla sfera S^2 si usa attribuire il genere $g = 0$ e considerarla come il multitopo di genere 0.

La superficie $a_1a_2a_1a_2$ è omeomorfa al *piano proiettivo* \mathbb{P}^2 .

La superficie $a_1a_2a_1^{-1}a_2$ è detta *bottiglia di Klein*.

Per uniformità di notazione sarà opportuno considerare anche la sfera come un quoziente, e precisamente come il quoziente di \mathbf{D}^2 , il disco chiuso unitario, ottenuta identificando tra loro i punti simmetrici rispetto ad un diametro fissato r . Considereremo \mathbf{D}^2 come un poligono generalizzato a 2 lati (le due semicirconferenze in cui r divide $S^1 = \mathcal{F}\mathbf{D}^2$), ed il suo quoziente S^2 corrisponderà al monomio aa^{-1} . Il quoziente aa di \mathbf{D}^2 è invece il piano proiettivo, come si verifica facilmente.

Un'altra superficie importante, come vedremo tra poco, è

$$a_1a_1a_2a_2 \cdots a_ga_g$$

che si chiama *multipiano proiettivo di genere g* e si denota con $g\mathbb{P}^2$. Nel caso particolare $g = 1$ si ottiene \mathbb{P}^2 . Confrontando con la rappresentazione di \mathbb{P}^2 data in precedenza vediamo in particolare che una data superficie può essere ottenuta in corrispondenza a monomi diversi.

Definizione 1.1. *Due poligoni etichettati si dicono equivalenti se le corrispondenti superfici quoziente sono omeomorfe.*

Una coppia di lati del poligono P , etichettato dal monomio (1), si dice una *coppia del primo tipo* se i due lati sono identificati tra loro e sono orientati discordemente, cioè se le loro etichette sono uguali ma con esponenti opposti. Se invece i due lati hanno etichette ed esponenti uguali essi costituiscono una *coppia del secondo tipo*.

Proposizione 1.2. *Se il poligono P , etichettato dal monomio (1), possiede una coppia di lati del secondo tipo, allora la superficie quoziente definita da (1) contiene un sottospazio chiuso omeomorfo ad un nastro di Moebius.*

Dimostr. Supponiamo che ℓ_1 ed ℓ_2 costituiscano una coppia del secondo tipo. Siano $\lambda_1 \subset \ell_1$ e $\lambda_2 \subset \ell_2$ segmenti chiusi non contenenti alcuno degli estremi di ℓ_1 ed ℓ_2 ed aventi la stessa immagine in S . Il quadrilatero chiuso $R \subset P$ i cui vertici sono gli stessi di λ_1 e di λ_2 ha per immagine in S un nastro di Moebius. \square

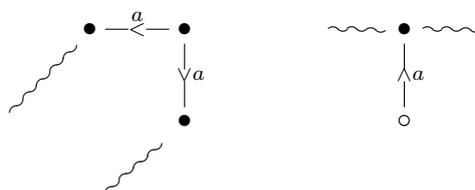
Il seguente teorema classifica completamente le superfici che si possono ottenere come quozienti di un poligono etichettato.

Teorema 1.3. *Ogni superficie quoziente di un poligono etichettato è omeomorfa ad un multitopo oppure ad un multipiano proiettivo.*

2 Dimostrazione del teorema 1.3

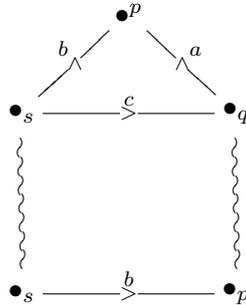
La dimostrazione è ottenuta attraverso successive sostituzioni del poligono etichettato P_{2n} con un altro ad esso equivalente. Nelle figure rappresenteremo con un \sim una successione di lati che non ci occorre specificare in dettaglio, con \bullet un vertice e con \circ un punto interno al poligono.

Primo passo: Eliminazione di coppie di lati del primo tipo adiacenti. Una coppia di lati del primo tipo adiacenti può essere eliminata sostituendo a P il poligono a $2n - 2$ lati ottenuto identificando tra loro i due lati.

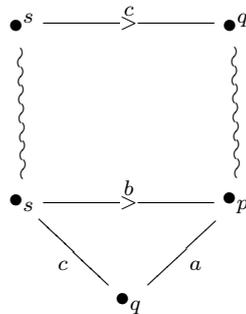


Dopo aver effettuato questa operazione per tutte le coppie di lati del primo tipo adiacenti si otterrà un poligono in cui non vi sono coppie di lati siffatte. Se saremo arrivati ad uno dei poligoni etichettati dell'enunciato il teorema è vero, altrimenti procediamo con il successivo passo della dimostrazione.

Secondo passo: Identificazione di tutti i vertici ad un solo punto. Per quanto dimostrato sopra, possiamo supporre che il poligono P sia etichettato da un monomio 1 in cui non vi sono coppie del primo tipo adiacenti. I vertici di P sono suddivisi in classi di equivalenza, ognuna delle quali è costituita da vertici che hanno la stessa immagine in S . Denoteremo tutti i vertici di una stessa classe con la stessa lettera. Supponiamo che non tutti i vertici siano equivalenti tra loro. Allora esiste una coppia di vertici adiacenti non equivalenti, siano essi p e q , e sia $a = a_i$ il lato compreso. L'altro lato di cui p è vertice non è etichettato a perché altrimenti i due lati costituirebbero una coppia del secondo tipo, contraddicendo il fatto che p e q non sono equivalenti. Sia dunque b l'altro lato di vertice p , ed s il secondo estremo di b . Consideriamo il segmento c congiungente s e q , e sia Δ il triangolo chiuso di vertici p, q, s .



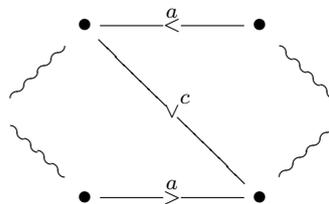
Tagliando P lungo c ed identificando il lato b con l'altro lato etichettato b , otteniamo un nuovo poligono etichettato Q equivalente a P , ed avente lo stesso numero di lati, come illustrato dalla figura seguente:



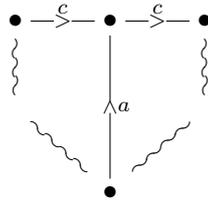
Con questa operazione la classe di equivalenza di p ha perso un elemento, mentre quella di q ne ha acquistato uno, ed il numero di elementi di tutte le altre classi è rimasto invariato. Iterando questo procedimento e riapplicando il primo passo, se necessario, è possibile far aumentare gli elementi di una classe di equivalenza a spese di tutte le altre, ottenendo alla fine che tutti i vertici siano equivalenti tra loro.

Terzo passo: normalizzazione di coppie di lati del secondo tipo.

Supponiamo di aver effettuato i primi due passi e che il poligono ottenuto, che chiameremo ancora P , contenga una coppia di lati del secondo tipo non adiacenti. Supponiamoli etichettati con la lettera a .



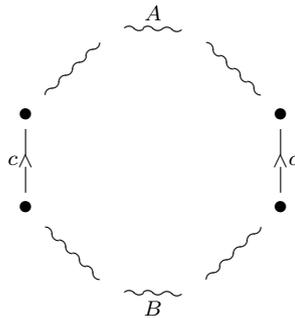
Con l'operazione di taglio ed identificazione illustrata dalla figura seguente è possibile sostituire P con un altro poligono Q in cui la coppia è sostituita da un'altra costituita da lati adiacenti, mentre le adiacenze delle altre coppie non vengono modificate, e i vertici rimangono tutti equivalenti tra loro.



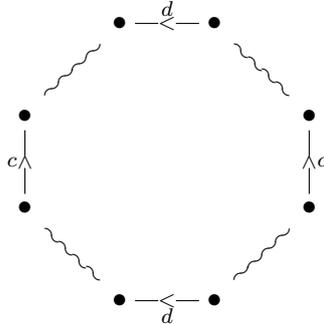
Iterando questo procedimento otteniamo un poligono equivalente a P in cui le coppie del secondo tipo, se ce ne sono, sono tutte normalizzate. Se il poligono etichettato così ottenuto, che chiameremo ancora P , è quello che definisce un multipiano proiettivo allora la dimostrazione è terminata. Altrimenti ci sono coppie di lati del primo tipo e si procede al passo successivo.

Quarto passo: normalizzazione di coppie di lati del primo tipo.

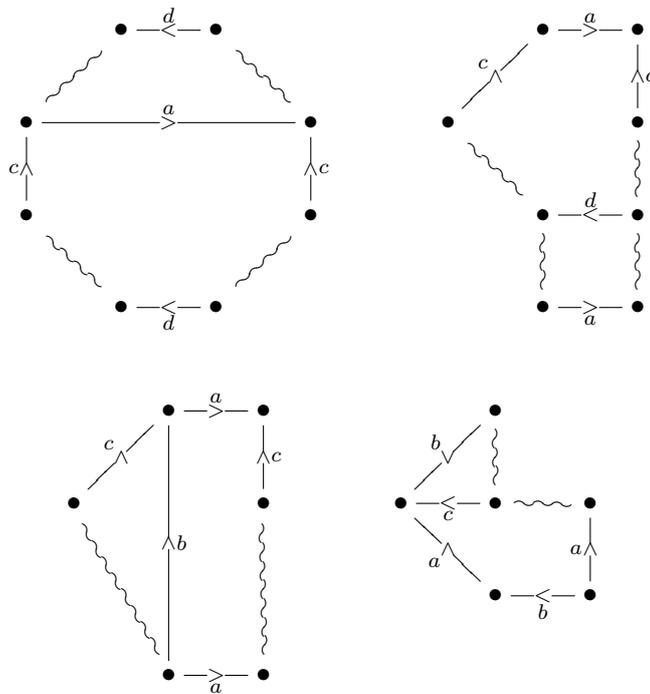
Supponiamo che P contenga una coppia di lati del primo tipo, etichettati c . Grazie al primo passo della dimostrazione, i due lati non sono adiacenti. Inoltre esiste un'altra coppia di lati del primo tipo, etichettati d , che separa i due lati c . cioè tale che i lati di ogni coppia si alternino a quelli dell'altra lungo il perimetro. Infatti, se così non fosse, si avrebbe una situazione come quella descritta nella figura seguente, in cui nessun vertice della regione A sarebbe equivalente ad uno della regione B , contraddicendo il fatto che tutti i vertici sono equivalenti.



Pertanto abbiamo la situazione seguente:

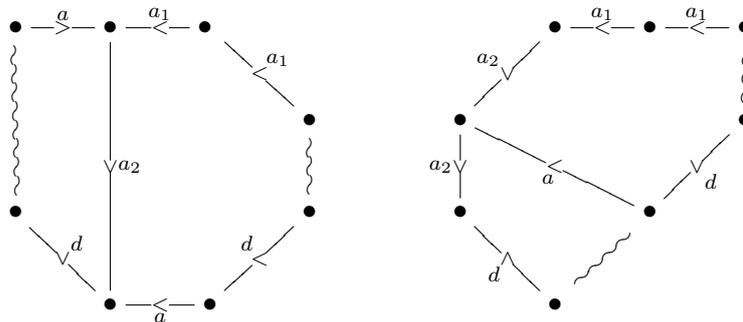
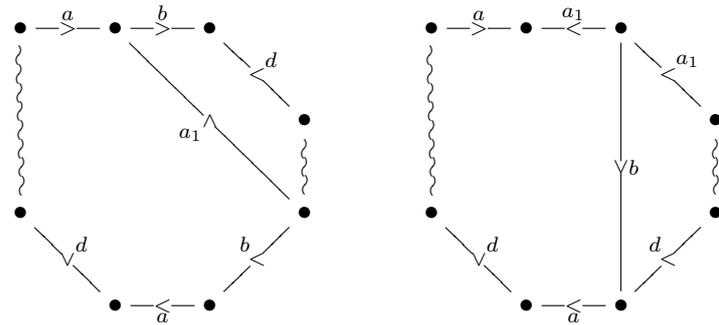
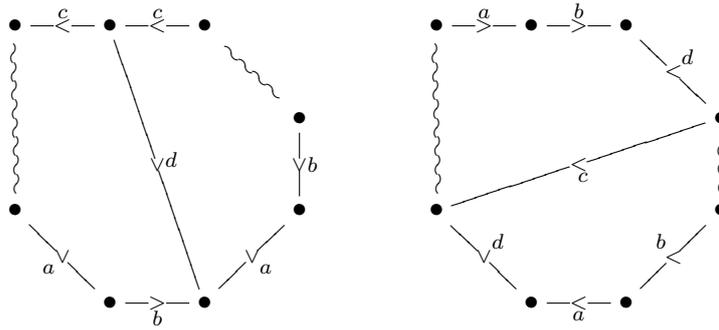


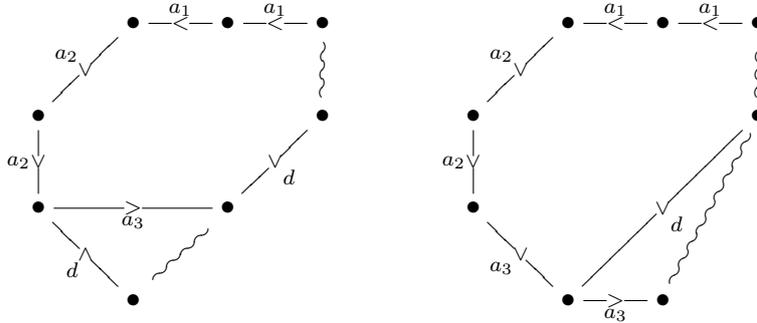
Mediante la successione di tagli ed identificazioni illustrati dalle figure seguenti si passa ad un poligono equivalente a P , in cui le due coppie di lati del primo tipo c, d vengono sostituite da due coppie del primo tipo normalizzate.



Se dopo aver normalizzato tutte le coppie di lati del primo tipo si arriva ad un poligono etichettato che definisce un multitoro, il teorema è dimostrato. Altrimenti il nuovo poligono, che denoteremo ancora con P , possiede sia coppie di lati del primo che del secondo tipo, tutte normalizzate. In tal caso è necessario un ulteriore passo.

Quinto passo: trasformazione di coppie di lati del primo tipo in coppie di lati del secondo tipo. Il poligono etichettato P possiede sia coppie di lati del primo tipo che del secondo tipo, tutte normalizzate. La successione di tagli ed identificazioni illustrati dalle figure seguenti mostra come, data una coppia di lati del secondo tipo e due coppie del primo tipo normalizzate, è possibile trasformare le coppie del primo tipo in coppie del secondo tipo normalizzate.





Iterando questo procedimento è possibile ottenere un poligono etichettato equivalente a P in cui vi sono solo coppie normalizzate del secondo tipo. Pertanto S è un multipiano proiettivo, ed il teorema è dimostrato. \square

Per ottenere una classificazione completa delle superfici descritte dal teorema precedente è necessario stabilire se le superfici dell'enunciato sono a due a due non omeomorfe. Questo è vero, e noi lo dimostreremo nel caso dei multitori e della sfera (caso orientabile). Ciò seguirà dal calcolo di $\chi(S)$ (cfr. §4).

3 Triangolabilità

Il teorema 1.3 fornirebbe una classificazione completa di tutte le superfici compatte e connesse se ogni tale superficie fosse omeomorfa al quoziente di un poligono opportunamente etichettato. Ciò è vero, ed il procedimento per dimostrarlo si basa sulla nozione di "triangolazione", che discuteremo in questo paragrafo.

Sia S una superficie topologica. Un *triangolo* in S è una coppia (T, φ) dove $T \subset S$ è un sottoinsieme compatto e φ è un omeomorfismo di T su un triangolo chiuso di \mathbb{R}^2 . I *lati*, risp. i *vertici* di T sono le controimmagini tramite φ dei lati, risp. dei vertici di $\varphi(T)$. Con abuso di notazione denoteremo spesso un triangolo (T, φ) con la sola lettera T , supponendo implicitamente assegnato l'omeomorfismo φ .

Una *triangolazione* di S è una famiglia $\tau = \{T_i\}_{i \in I}$ di triangoli di S con le seguenti proprietà:

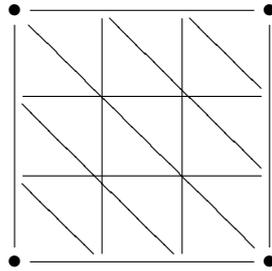
$$(T1) \bigcup_{i \in I} T_i = S$$

(T2) Se $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ per qualche $i \neq j$, allora $T_i \cap T_j$ è un vertice o un lato di entrambi i triangoli.

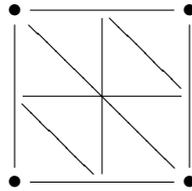
(T3) Ogni lato di ogni triangolo T_i è anche lato di uno ed un solo altro triangolo T_j .

(T4) Per ogni vertice v di qualche triangolo, i triangoli T_i che lo contengono sono un numero finito ≥ 3 , e si possono ordinare circolarmente in modo che due triangoli siano consecutivi se e solo se hanno un lato in comune.

La famiglia di triangoli di $\mathbf{I} \times \mathbf{I}$ rappresentata dalla figura seguente induce una triangolazione sul toro T :



Invece la famiglia di triangoli della figura seguente:



non definisce una triangolazione di T .

Se possiede almeno una triangolazione S si dice *triangolabile*. Una *triangolazione* $\tau = \{T_i\}_{i \in I}$ di S si dice *finita* se I è un insieme finito, cioè se τ consiste di un numero finito di triangoli. Poiché l'unione di un numero finito di compatti è compatto, dalla condizione (T1) segue che, se possiede una triangolazione finita, S è compatta. Viceversa:

Proposizione 3.1. *Se S è una superficie compatta e triangolabile, ogni sua triangolazione è finita.*

Dimostr. Sia $\tau = \{T_i\}_{i \in I}$ una triangolazione di S . Per ogni indice $i \in I$ scegliamo un punto $p_i \in \text{Int}(T_i)$. Poniamo:

$$U_i = S \setminus \overline{\{p_j : j \neq i\}}$$

Si ha $T_i \subset U_i$, per ogni $i \in I$, e pertanto $\{U_i\}_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto di S . Inoltre $p_i \notin U_j$ per ogni $i \neq j$, e pertanto $\{U_i\}_{i \in I}$ non possiede sottoricoprimenti propri. Poiché S è compatta l'unica possibilità è che il ricoprimento $\{U_i\}_{i \in I}$ sia finito, e quindi che I sia finito. \square

Proposizione 3.2. *Se S è una superficie compatta e triangolabile allora S è omeomorfa al quoziente di un poligono convesso opportunamente etichettato.*

Dimostr. Sia $\tau = \{T_1, \dots, T_n\}$ una triangolazione di S . Supponiamo ordinati T_1, \dots, T_n in modo che per ogni $2 \leq i \leq n$ il triangolo T_i abbia un lato ℓ_i in comune con qualche T_j , $j < n$, sia questo il lato m_{i-1} . Tale ordinamento esiste per la connessione di S . Sia T l'unione disgiunta dei triangoli T_1, \dots, T_n e sia P il quoziente ottenuto da T identificando tra loro i lati ℓ_i ed m_{i-1} , $i = 2, \dots, n$. È immediato verificare che P è omeomorfo ad un poligono a $2n$ lati, che corrispondono ai lati di T_1, \dots, T_n non ancora identificati tra loro. e che S è un quoziente di P , ottenuto dall'identificazione di tali lati a due a due in modo corrispondente alla triangolazione τ . \square

Dalla proposizione 3.2 segue che il teorema 1.3 si estende ad ogni superficie compatta connessa e triangolabile. Ma tutte le superfici compatte e connesse sono triangolabili. Infatti:

Teorema 3.3. *Ogni superficie topologica è triangolabile.*

La dimostrazione di questo teorema va oltre gli scopi di questo corso e verrà pertanto omessa. Deduciamo il seguente importante corollario, tenuto conto del teorema 1.3 e della proposizione 3.2:

Teorema 3.4. *Ogni superficie compatta e connessa è omeomorfa o ad S^2 , o a un multitoro gT per qualche $g \geq 1$, oppure a un multipiano proiettivo $g\mathbb{P}^2$ per qualche $g \geq 1$.*

Per ottenere una classificazione completa delle superfici compatte e connesse resta ancora da dimostrare che le superfici elencate nell'enunciato del teorema sono a due a due non omeomorfe, cioè che la classificazione data è irridondante. Di questo ci occuperemo nel prossimo paragrafo.

4 Caratteristica di Eulero-Poincaré e triangolazioni

Sia S una superficie compatta e connessa e τ una triangolazione di S . Poniamo:

$$\begin{aligned} v(\tau) &= \text{numero di vertici di } \tau \\ \ell(\tau) &= \text{numero di lati di } \tau \\ t(\tau) &= \text{numero di triangoli di } \tau \end{aligned}$$

In numero intero

$$\chi(S, \tau) := v(\tau) - \ell(\tau) + t(\tau)$$

è chiamato *caratteristica di Eulero-Poincaré* di τ . Il risultato che sta alla base dell'utilità di $\chi(S, \tau)$ è il seguente:

Teorema 4.1. *Siano τ, τ' due triangolazioni della superficie compatta e connessa S . Allora $\chi(S, \tau) = \chi(S, \tau')$.*

Per poter dimostrare il teorema 4.1 abbiamo bisogno di alcune premesse. Siano τ, τ' due triangolazioni della superficie compatta e connessa S . Allora τ' si dice un *raffinamento* di τ , o *più fine* di τ , e si scrive $\tau' > \tau$, se ogni vertice di τ è anche vertice di τ' , ogni lato di τ è unione di lati di τ' , ed ogni triangolo di τ è unione di triangoli di τ' .

Proposizione 4.2. *Siano τ, τ' due triangolazioni della superficie compatta e connessa S . Se $\tau' > \tau$ allora $\chi(S, \tau) = \chi(S, \tau')$.*

Dimostr. Sia T un triangolo di τ , e siano $\theta_1, \dots, \theta_s$ i triangoli di τ' contenuti in T . Sarà sufficiente dimostrare che, se nel calcolo di $\chi(S, \tau)$ si sostituiscono $\theta_1, \dots, \theta_s$, i loro lati e i loro vertici al posto di T , si ottiene lo stesso risultato. Equivalentemente sarà sufficiente dimostrare che, detto V il numero dei vertici di $\theta_1, \dots, \theta_s$ ed L il numero dei lati di $\theta_1, \dots, \theta_s$, si ha:

$$V - L + s = 1$$

Si osservi che $\theta_1, \dots, \theta_s$ possono essere ottenuti a partire da T attraverso un numero finito di operazioni seguenti:

- (a) Sostituire un lato ℓ con due nuovi lati adiacenti ℓ_1, ℓ_2 ed un vertice compreso, tali che $\ell = \ell_1 \cup \ell_2$.
- (b) Aggiungere un lato congiungendo due vertici, e sostituendo un poligono chiuso contenuto in T contenente ℓ con due poligoni che hanno in comune il lato ℓ .
- (c) Aggiungere un vertice v interno a un poligono chiuso contenuto in T , e congiungere v con k dei vertici situati sul bordo del poligono.

Ad ogni passo si sostituiscono i poligoni in cui era suddiviso T con nuovi poligoni, alla fine pervenendo all'insieme di triangoli $\{\theta_1, \dots, \theta_s\}$. Poiché ognuna delle operazioni (a),(b),(c) non cambia la somma alterna “vertici - lati + facce”, si deduce l'asserto. \square

Il seguente teorema verrà utilizzato senza dimostrazione:

Teorema 4.3. *Se τ e τ' sono due triangolazioni della superficie compatta e connessa S , allora esiste una triangolazione τ'' tale che $\tau'' > \tau$ e $\tau'' > \tau'$.*

Dimostrazione del teorema 4.1 Per il teorema 4.3 esiste τ'' tale $\tau'' > \tau$ e $\tau'' > \tau'$. D'altra parte, per la proposizione 4.2 si ha:

$$\chi(S, \tau) = \chi(S, \tau'') = \chi(S, \tau')$$

□

Dal teorema 4.1 discende che, per ogni superficie compatta e connessa S , è possibile definire la *caratteristica di Eulero-Poincaré di S* come

$$\chi(S) := \chi(S, \tau)$$

per una qualsiasi triangolazione τ di S .

Proposizione 4.4. *$\chi(S)$ è un invariante topologico per una superficie compatta e connessa S .*

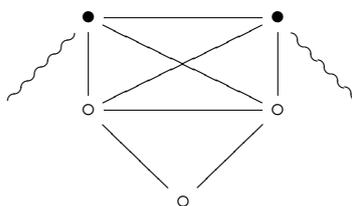
Dimostr. Esercizio.

Terminiamo il paragrafo con il seguente risultato che permette di calcolare facilmente $\chi(S)$ quando si conosce una rappresentazione di S come quoziente di un poligono etichettato:

Proposizione 4.5. *Sia S una superficie compatta e connessa ottenuta come quoziente di un poligono etichettato P_{2m} a $2m$ lati, tale che i $2m$ vertivi abbiano per immagini k punti distinti di S . Allora:*

$$\chi(S) = 1 + k - m$$

Dimostr. È sufficiente calcolare $\chi(S, \tau)$ dove τ è la triangolazione indotta su S dal ricoprimento di P_{2m} mediante triangoli illustrato dalla figura seguente:



□

Corollario 4.6.

$$\chi(S^2) = 2, \quad \chi(gT) = 2 - 2g, \quad \chi(g\mathbb{P}^2) = 2 - g$$

per ogni $g \geq 1$. In particolare due multitori di generi diversi non sono omeomorfi, e due multipiani proiettivi di generi diversi non sono omeomorfi.

Dimostr. Immediata.

A titolo di esempio, classifichiamo la bottiglia di Klein K . Ricordiamo che K è il quoziente del poligono etichettato $abab^{-1}$. In questo caso $m = 2$ e $k = 1$. Quindi $\chi(K) = 0$. Poiché l'etichettatura contiene una coppia del secondo tipo, K è il 2-piano proiettivo.