Tutorato del corso di GE 3
Lezione del 04/05/2009

Esercizi

1. Con riferimento all'esercizio 3 dello scorso tutorato, dimostrare che X è compatto mentre Y non lo è. (*Sugg.*: provare a dimostrare che X è compatto utilizzando la definizione di compattezza)

2. Siano $Y \subset X$ spazi topologici. Y si dice un ritratto di X se esiste $f : X \to Y$ continua t.c. $f(y) = y, \forall y \in Y$. Dimostrare che se Y e' un ritratto di X e $y \in Y$ allora $\pi_1(Y, y)$ e' un sottogruppo di $\pi_1(X, y)$. Dimostrare che se un sottospazio $Y_1 \subset X$ è un retratto di deformazione di X [v. tutorato del 27/04] allora è anche un retratto. Dare un esempio di retratto di X che non sia omotopicamente equivalente a X.

3. Sia X uno spazio topologico. Costruire un'equivalenza omotopica tra X e $X \times I$ e una tra X e $X \times \mathbf{R}$. Dare un esempio di spazio topologico X tale che X ed $X \times I$ non siano omeomorfi.

4. Dimostrare che $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ e' omeomorfo a $S^{n-1} \times \mathbf{R}$. Dedurne che, per un qualsiasi $x \in S^{n-1}, \pi_1(S^{n-1}, x)$ e' un sottogruppo di $\pi_1(R^n \setminus \{0\}, x)$.

5. Sia $x \in S^n$. $S^n \setminus \{x\}$ è contraibile? Sia $Y = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \text{t.c. } x^2+y^2 = 1, \ |z| \leq 1\}$ e sia $(1, 0, 0) \in Y$ e consideriamo ora $Y_1 = Y \setminus \{(1, 0, 0)\}$. Dimostrare che Y_1 è omotopicamente equivalente a $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \text{t.c. } x^2+y^2 = 1, |z| = 1\} \cup \{(0, 1, t), t \in [-1, 1]\}$.