Tutorato del corso di GE 3
Lezione del 27/04/2009

Esercizi

1. Dal libro Geometria 2:
   - esercizi $2, 3, 4$ pag. 145.

2. Siano X, Y due spazi topologici omotopicamente equivalenti. Dimostrare che X è connesso per archi se e solo se Y lo è.

3. Consideriamo i seguenti due spazi topologici: X è l'unione in $\mathbf{R}^2$ delle circonferenze di centro i punti di coordinate $(\frac{1}{n}, 0)$ e raggio $\frac{1}{n}$, al variare di $n \in \mathbf{N}$; Y è lo spazio topologico quoziente ottenuto dall'unione disgiunta di un'infinità numerabile di spazi omeomorfi a circonferenze, per ognuno dei quali si sia scelto un punto, identificando tutti i punti scelti. Dire se X e Y siano omeomorfi.

4. Un retratto di deformazione di uno spazio topologico X è un sottospazio topologico Y t.c. $\exists r : X \to Y$, $r(y) = y$, $\forall y \in Y$ e detta $i : Y \to X$ l'inclusione di Y in X, $ir : X \to X$ è omotopa all'identità, con l'ulteriore richiesta che esista un'omotopia $f : X \times I \to X$ tra le due mappe tale che valga la condizione $f(y, t) = y, \forall y \in Y, \forall t \in I$. Dimostrare che un retratto di deformazione di uno spazio è omotopicamente equivalente allo spazio soprastante. Dimostrare che i seguenti sottospazi sono retratti di deformazione del relativo spazio ambiente: $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1} \setminus 0$; $Y = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ t.c. $x^2 + y^2 = 1 \subset \mathbf{R}^3 \setminus t$, dove t è la retta di equazioni $x = 0, y = 0$; $Y \cap \pi = Y_1 \subset Y$, dove Y è definito come al punto precedente e π è il piano di equazione $z = 0$. Dimostrare che se uno spazio ha un retratto di deformazione che è un punto allora è contraibile; perchè non è vero a priori il viceversa? Provare a dire se sia vero o meno il contrario.

5. Sia X uno spazio topologico. Definiamo il cono su X, che denoteremo $C(X) = I \times X/R$, dove R e' la relazione di equivalenza che identifica ad un punto $0 \times X$. Dimostrare che qualsiasi sia X, $C(X)$ è connesso per archi e contraibile. Dimostrare inoltre che $C(S^n)$ è isomorfo a $\overline{D^{n+1}}$ la palla unitaria chiusa di $\mathbf{R}^{n+1}$.

6. Si consideri il quoziente $Y_1 = I \times S^1/R$, dove R e' la relazione di equivalenza che identifica ad un punto $0 \times S^1$ e ad un (altro) punto $1 \times S^1$. Dimostrare che Y_1 e' omeomeorfo ad S^2. Più in generale si consideri il quoziente $Y_n = I \times S^n/R$, dove R e' la relazione di equivalenza che identifica ad un punto $0 \times S^n$ e ad un (altro) punto $1 \times S^n$. Dimostrare che Y_n e' omeomeorfo ad S^{n+1}.

7. Si consideri il quoziente $Z_1 = \overline{D^2}/S^1$ ottenuto dalla sfera unitaria chiusa in $\mathbf{R}^2$ identificando ad un punto la circonferenza unitaria. Dimostrare che Z_1 e' omeomorfo ad S^2. Si generalizzi (come sopra) la costruzione al caso $Z_n = \overline{D^{n+1}}/S^n$.