Tutorato del corso di GE 3
Lezione del 30/03/2009

Esercizi

1. Dal libro Geometria 2:

   - Esercizi $5, 7, 10, 11$ pag. 114;
   - esercizio 10: cosa si puo' dire se si rimuove l'ipotesi che $\lim_{n\to\infty} |b_n - a_n| = 0$?
   - esercizio 2, pag. 131.

2. Dimostrare che uno spazio topologico X è T_2 se e solo se $\Delta = \{(x, x), x \in X\} \subset X \times X$ è chiuso per la topologia prodotto.

3. Siano X e Y sue spazi topologici con Y di Hausdorff e sia $f : X \to Y$ un' applicazione continua. Dimostrare allora che $\text{graf}(f) = \{(x, f(x)), x \in X\} \subset X \times Y$ è chiuso per la topologia prodotto. Dare inoltre un esempio dove Y non è di Hausdorff e $\text{graf}(f)$ non è chiuso.

4. Siano X_1, X_2 due copie di $\mathbf{R}$ con la topologia euclidea, i.e., X_i è uno spazio topologico con un omeomorfismo fissato $\pi_i : X_i \to \mathbf{R}$, $i = 1, 2$. Consideriamo ora lo spazio topologico $Z = X_1 \sqcup X_2$[1]. Introduciamo la seguente relazione di equivalenza $\sim$ su Z:

$$x \sim y \iff x = y \text{ oppure } \pi_j(x) = \pi_k(y), j \neq k \text{ e } \pi_j(x) > 0.$$

   Si consideri $\tilde{Z}$, il quoziente di Z rispetto a $\sim$ con la topologia quoziente. Dire se $\tilde{Z}$ è di Hausdorff, se è compatto, se è connesso, se è localmente compatto.

5. Sia X uno spazio topologico. A partire da X, costruiamo un nuovo spazio topologico $\tilde{X}$ nel seguente modo: insiemisticamente $\tilde{X} = X \sqcup \{\infty\}$, dove con ∞ indichiamo un nuovo punto che stiamo aggiungendo ad X. Gli aperti di $\tilde{X}$ sono gli aperti $U \subset X$ e gli insiemi $V \ni \infty$ tali che $\tilde{X} \setminus V$ è chiuso e compatto in X. Abbiamo inoltre una mappa $i : X \to \tilde{X}$, t.c. $i(x) \to x \in \tilde{X}$. $\tilde{X}$ è detto la compattificazione di Alexandroff di X.Dimostrare che:

   - la mappa i è continua e aperta; $\tilde{X}$ è compatto e unico a meno di omeomorfismo;
   - $i(X) \subset \tilde{X}$ è denso, se X non è compatto; se X è compatto, $\tilde{X}$ è sconnesso;
   - $\tilde{X}$ è T_2 se e solo se X è T_2 e localmente compatto;
   - la compattificazione di Alexandroff di $\mathbf{R}$ è omeomorfa a S^1; più in generale la compatificazione di Alexandroff di $\mathbf{R}^n$ è omeomorfa a S^n.

6. É sempre vero che l'intersezione di due compatti è compatta?

[1] Il simbolo $\sqcup$ indica l'unione disgiunta di insiemi