Tutorato del corso di GE 3
Lezione del 02/03/2009

Info

Per domande, dubbi o quant'altro potete contattarmi via e-mail (robysvaldi@gmail.com), oppure cercarmi in facoltà: vi verrà data risposta, nei limiti del possibile, quanto prima. Per informazioni relative al corso e/o all'esame siete pregati di rivolgervi direttamente al professore in quanto io non risulto competente in materia.

Esercizi

1. Dal libro Geometria 2: pagg. $23-24$, esercizi $12, 13, 17, 18, 20$.

2. Verificare che la famiglia dei dischi aperti bucati (i.e. dei sottoinsiemi di $\mathbf{R}^n$ che, per $x \in \mathbf{R}^n$ e $\epsilon > 0$ fissati, sono del tipo $\{y \in \mathbf{R}^n \text{ t.c. } y \neq x,\ |x-y| < \epsilon\}$, dove $|\cdot|$ è la norma indotta dall'usuale prodotto scalare in $\mathbf{R}^n$) è una base per la topologia euclidea.

3. Sia $\mathbf{A}^2_k$ lo spazio affine bidimensionale su un campo k qualsiasi. Verificare che su tale insieme possiamo naturalmente porre un topologia i cui chiusi sono costruiti nella seguente maniera (si tratta della cosiddetta topologia di Zarisky del piano affine):
   consideriamo $A = k[X, Y]$, l'anello dei polinomi in 2 variabili a coefficienti in k e sia $I \subset A$ un ideale; definiamo allora $\mathbf{A}^2_k \supset V(I) = \{(x, y) \text{ t.c. } f(x, y) = 0,\ \forall f \in I\}$.
   Si può inoltre verificare (provare!) che in questa topologia tutti i punti di $\mathbf{A}^2_k$ sono chiusi.
   Con la stessa costruzione, munire la retta affine su k (i.e. $\mathbf{A}^1_k$) della topologia di Zarisky. Di che topologia si tratta?
   Notare che questa stessa costruzione può esser estesa al caso di $\mathbf{A}^n_k$ per una qualsiasi scelta di $n \in \mathbf{N}$.

4. Dimostrare che lo spazio topologico $(\mathbf{R},\ j_d)$ (v. esempio 1, pag. 17) non è metrizzabile, tramite la seguente traccia:
   - dimostrare che $(\mathbf{R},\ j_d)$ ammette un sottoinsieme numerabile denso;
   - dimostrare che $(\mathbf{R},\ j_d)$ non ammette una base numerabile; [*Suggerimento*: si considerino al variare di $x \in \mathbf{R}$ gli insiemi $\mathcal{I}_x = [x, +\infty)$].
   - dedurne che $(\mathbf{R},\ j_d)$ non è metrizzabile.