Università degli Studi Roma Tre
Anno Accademico 2008/2009
GE3 - Topologia
Seconda prova di valutazione in itinere
Giovedì 28 Maggio 2009

1. Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$:

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x+2)^2 + y^2 = 1\},$$

$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x-2)^2 + y^2 < 1\}$$

$$C := \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x < 1\},$$

$$D := \{(1,0) \in \mathbb{R}^2\}.$$

   (a) Dimostrare che $A \cup C$ e $B \cup D$ sono connessi.

   (b) Dimostrare che $X := A \cup B \cup C \cup D$ è connesso.

   (c) Calcolare $\pi_1(X, (-1,0))$ (Sugg.: dimostrare che X è omotopicamente equivalente a un suo opportuno sottospazio).

Soluzione:

(a) A è una circonferenza, e quindi è connesso. C è omemorfo a un intervallo di $\mathbb{R}$ e quindi è connesso. Siccome $A \cap C \neq \emptyset$ allora $A \cup C$ è connesso perché unione di connessi non disgiunti.

B è un disco in $\mathbb{R}^2$ e quindi è connesso. Inoltre $B \subseteq B \cup D \subseteq \overline{B}$, perciò anche $B \cup D$ è connesso.

(b) Siccome $A \cup C$ è connesso e $D \subseteq \overline{A \cup C}$ allora $A \cup C \cup D$ è connesso. $X = (A \cup C \cup D) \cup (B \cup D)$, quindi X è unione dei connessi $A \cup C \cup D$ e $B \cup D$, che non sono disgiunti. Perciò X è connesso.

(c) Dimostreremo che X e A sono omotopicamente equivalenti. Sia $i : A \hookrightarrow X$ l'inclusione e sia $f : X \to A$ tale che $f((x,y)) = \begin{cases} (x,y) & \text{se } x \leq -1 \\ (-1,0) & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$. i è chiaramente continua e f è continua dato che le due funzioni, da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x,y)$ e $(x,y) \mapsto (-1,0)$ sono separatamente continue su sottoinsiemi chiusi di X e si incollano bene sulle loro intersezioni. $f \circ i = id_A$. Rimane da verificare solamente che $i \circ f$ è omotopa alla funzione id_X. Definiamo $F : X \times I \to X$ tale che

$$F((x,y),t) = \begin{cases} \begin{cases} (x,y) & \text{se } x \leq -1 \\ (x,(1-2t)y) & \text{se } x \geq -1 \end{cases} & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \begin{cases} (x,y) & \text{se } x \leq -1 \\ (-(2t-1) + x(2-2t), 0) & \text{se } x \geq -1 \end{cases} & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

F è ben definita, dato che $F(X \times I) \subseteq X$. Inoltre F è una funzione continua, perché le varie parti che ne costituiscono la definizione sono separatamente continue su sottoinsiemi chiusi di $X \times I$ e si incollano bene sulle loro intersezioni. Inoltre $F((x,y),0) = id_X$, mentre $F((x,y),1) = i \circ f$. Quindi f è effettivamente un'equivalenza omotopica perciò, per quanto visto a lezione, $\pi_1(X,(-1,0)) \cong \pi_1(A,(-1,0)) \cong \mathbb{Z}$.

2. Vero o Falso? Se vero dare una breve giustificazione, se falso esibire un controesempio.

   (a) Le componenti connesse di uno spazio X sono sottoinsiemi aperti di X.

   (b) Il quoziente di uno spazio topologico connesso è connesso.

   (c) Se il quoziente di uno spazio topologico è connesso allora lo spazio è connesso.

   (d) Il quoziente di uno spazio topologico semplicemente connesso è semplicemente connesso.

   (e) Siano $X := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $Y := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x+1)^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Allora $X \cup Y$ ha gruppo fondamentale banale.

   (f) Uno spazio contraibile è semplicemente connesso.

   (g) $X := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2+y^2\}$, con la topologia euclidea indotta da $\mathbb{R}^3$, è una varietà topologica connessa di dimensione 2.

   Soluzione:

   (a) FALSO. Si prenda ad esempio $X := \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}^+\}$. Allora la componente connessa di X che contiene 0 è $\{0\}$, ma $\{0\}$ non è un sottoinsieme aperto di X.

   (b) VERO. Sia infatti X uno spazio topologico, Y un suo quoziente e $p : X \to Y$ la proiezione canonica. Ricordiamo che l'immagine di un connesso tramite funzione continua è anch'essa connessa, perció, dato che p è continua e suriettiva, $Y = p(X)$ è connesso.

   (c) FALSO. Sia $X = \{a,b\}$ con la topologia discreta e ρ la relazione banale (i.e. $x\rho y$ per ogni $x,y \in X$). Allora X è sconnesso, ma X/ρ, essendo cosituito da un solo punto, è connesso.

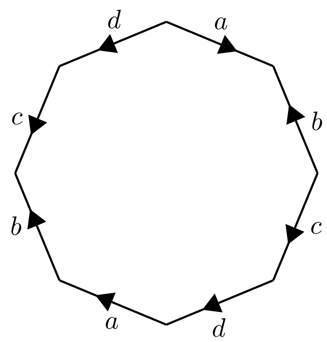
   (d) FALSO. Identificando i due estremi di I (semplicemente connesso) si ottiene uno spazio omeomorfo a S^1 (non semplicemente connesso).

   (e) VERO. X e Y sono due sfere di raggio 1 e di centro, rispettivamente, $(1,0,0)$ e $(-1,0,0)$. Si considerino $Z_1 := X \cup Y \setminus \{(2,0,0)\}$ e $Z_2 := X \cup Y \setminus \{(-2,0,0)\}$. Z_1 e Z_2 sono aperti in $X \cup Y$. Z_1 è semplicemente connesso, dato che è omotopicamente equivalente a Y. Analogamente Z_2 è semplicemente connesso. Inoltre $Z_1 \cap Z_2 = X \cup Y \setminus \{(2,0,0),(-2,0,0)\}$ è connesso per archi. Per il teorema di Van Kampen, allora, $X \cup Y$ è semplicemente connesso, i.e. $\pi_1(X \cup Y,(0,0,0)) \cong \{0\}$.

(f) VERO. Uno spazio X è semplicemente connesso se e solo se è connesso per archi e ha gruppo fondamentale banale. Per quanto visto a lezione uno spazio contraibile è connesso per archi. Inoltre spazi omotopicamente equivalenti hanno gruppi fondamentali isomorfi, quindi, dato che X, per ipotesi, è omotopicamente equivalente a un punto $\{p\}$ e che $\pi_1(\{p\}, p)$ è banale, allora X è semplicemente connesso.

(g) FALSO. Se X fosse una varietà topologica di dimensione 2 allora, per definizione, dovrebbe esistere un intorno aperto U di $(0, 0, 0)$ (in X) omeomorfo a un disco aperto D di $\mathbb{R}^2$. Però mentre $D \setminus \{y\}$ è connesso $\forall y \in D$, al contrario $X \setminus \{(0, 0, 0)\}$ è sconnesso. Assurdo.

3. Classificare la superficie compatta e connessa S ottenuta come quoziente del seguente poligono con etichettatura $ab^{-1}cdabc^{-1}d^{-1}$.



Soluzione:

Calcoliamo la caratteristica di Eulero di S, $\chi(S)$. Dato che i vertici del poligono sono tutti equivalenti si ha $k = 1$. Inoltre $m = 4$, da cui $\chi(S) = 1 - 4 + 1 = -2$. Il poligono ha coppie di lati del secondo tipo (aa), quindi S non è orientabile. Perciò S è un multipiano proiettivo di genere $g = 2 - \chi(S) = 4$, ovvero S è la somma connessa di quattro piani proiettivi reali.