Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. E. Sernesi
Tutori: Andrea Abbate e Matteo Acclavio

TUTORATO NUMERO 3 (12 MARZO 2009)
SOTTOSPAZI VETTORIALI, GENERATORI, DIPENDENZA LINEARE, BASI

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck
http://www.mat.uniroma3.it

1. Determinare, se esistono, tutte le soluzioni dei seguenti sistemi di equazioni lineari, usando il metodo Gauss-Jordan:

   (a) $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 3x+2y+5z=1 \\ y=1 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} 3y+z=1 \\ 2x+6y=4 \\ x-z=1 \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} 2y+2z=3 \\ x+z=1 \\ 2x+2y+4z=2 \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} x+z+2w=0 \\ 2x+3y+z=1 \\ 3x+3y+z+3w=1 \end{cases}$

2. Mostrare che l'insieme dei polinomi $K[X]$ a coefficienti in un campo K è un K-spazio vettoriale che non possiede una base finita. Sia Π_n l'insieme dei polinomi di grado $\leq n$: mostrare che è un sottospazio vettoriale di $K[X]$ e trovarne la dimensione.

3. Mostrare che i seguenti insiemi sono spazi vettoriali su $\mathbb{Q}$:

   (a) Il campo dei razionali gaussiani $\mathbb{Q}(i) = \{a+ib; a,b \in \mathbb{Q}\}$
   (b) Il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$

   Mostrare poi che $\mathbb{Q}(i)$ ha dimensione 2 mentre $\mathbb{R}$ non ha una base finita.

4. Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono suoi sottospazi vettoriali:

   (a) $\{(x,y,z) : x+y+z=0\}$
   (b) $\{(x,y,z) : x+y+z=1\}$
   (c) $\{(x,y,z) : x^2+y^2=0\}$
   (d) $\{(x,y,z) : x^2+y^2=1\}$
   (e) $\{(x,y,z) : 3y-z=0, x+2z=0\}$
   (f) $\{(x,y,z) : x=0\} \cup \{(x,y,z) : z=0\}$

5. Stabilire se i seguenti insiemi di vettori generano l'intero spazio $\mathbb{R}^3$, se sono linearmente dipendenti o indipendenti e se ne costituiscono una base. Se sono dipendenti, scrivere uno di questi come combinazione lineare degli altri. Se possibile, trovare una combinazione lineare che dia come risultato $(1,1,1)$.

   (a) $v_1=(2,-1,1)$, $v_2=(2,-2,1)$, $v_3=(3,0,1)$
   (b) $v_1=(1,1,1)$, $v_2=(2,0,6)$, $v_3=(2,3,0)$
   (c) $v_1=(1,1,0)$, $v_2=(0,2,1)$, $v_3=(3,0,2)$, $v_4=(1,4,2)$
   (d) $v_1=(3,2,9)$, $v_2=(1,3,5)$