Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. E. Sernesi
Tutori: Andrea Abbate e Matteo Acclavio

Soluzioni del tutorato numero 7 (23 Aprile 2009)
Spazi affini, punti e rette nel piano affine

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck
http://www.mat.uniroma3.it

1. (a) Affinché A, B e C siano allineati, deve essere $\det\begin{pmatrix}\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{BC}\end{pmatrix} = 0$, quindi abbiamo che $\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix} = 0$, quindi i punti sono allineati. Per trovare la retta che li contiene, notiamo innanzi tutto che se tre punti sono allineati è sufficiente considerare la retta che ne contiene due qualunque distinti; chiamati questi punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, basta imporre che per qualsiasi punto (x, y) sulla retta i vettori $(x - x_1, y - y_1)$ e $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ siano allineati, ovvero: $\begin{vmatrix}x - x_1 & y - y_1\\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1\end{vmatrix} = 0$; in questo caso, prendendo $P_1 = A$ e $P_2 = B$ troviamo che per la retta è $3x - y - 3 = 0$.

   (b) $\det\begin{pmatrix}\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{BC}\end{pmatrix} = 9$, quindi i punti non sono allineati.

   (c) Allineati per $k = \pm 1$, per $k = 1$ la retta è $x - y - 1 = 0$, per $k = -1$ è $x + y - 3 = 0$.

2. (a) Per trovare l'equazione parametrica, è sufficiente scrivere $\begin{cases} x = x_P + x_v t\\ y = y_P + x_v t\end{cases}$, dove (x_P, y_P) sono le coordinate del punto P e (x_v, x_v) quelle di v, quindi in questo caso $\begin{cases} x = 1 + 3t\\ y = 1 + t\end{cases}$. Per l'equazione cartesiana invece bisogna imporre il determinante $\begin{vmatrix}x - x_P & y - y_P\\ x_v & x_v\end{vmatrix} = 0$, e in questo caso $\begin{vmatrix}x - 1 & y - 1\\ 3 & 1\end{vmatrix} = x - 3y + 2 = 0$.

   (b) Equazione parametrica: $\begin{cases} x = -2 + t\\ y = 3 - t\end{cases}$, equazione cartesiana: $x + y - 1 = 0$. (Si noti che un vettore parallelo a $(1000, -1000)$ è parallelo anche a $(1, -1)$)

   (c) $P = (2, 0)$, equazione parametrica: $\begin{cases} x = 2 + 2t\\ y = t\end{cases}$, equazione cartesiana: $x - 2y - 2 = 0$.

3. (a) Per verificare la reciproca posizione tra le due rette nel piano affine, calcoliamo il determinante della matrice dei coefficienti. Si ha $\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix} =$

$3 \neq 0$, quindi le rette sono incidenti (il sistema infatti ammette un'unica soluzione), e risolvendo il sistema si trova che il loro punto comune è $P(-1, 1)$.

(b) Passando all'equazione cartesiana di s, notiamo che i suoi coefficienti direttori sono proporzionali a quelli di r, ma il punto $(-1, -1) \in r$ ma non è in s, quindi le due rette sono parallele e distinte.

(c) Passando alle equazioni cartesiane di s ed r, si vede subito che le rette sono parallele e coincidenti (le equazioni sono proporzionali).

4. Notiamo innanzi tutto che $\Phi : \lambda x + \mu y = 0$, con λ e μ parametri omogenei

(a) Per trovare P cerchiamo la soluzione del sistema $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases}$ e troviamo $P = (-\frac{1}{3}, \frac{7}{3})$.

(b) Considerando l'equazione di Φ e imponendo il passaggio per P si trova $\lambda = 7$, $\mu = 1$ (si noti che andava bene anche una qualsiasi altra coppia proporzionale a $(7, 1)$) e quindi l'equazione cartesiana di t è $7x + y = 0$. L'equazione parametrica invece è $\begin{cases} x = t \\ y = -7t \end{cases}$.

(c) L'equazione del fascio Ψ è $7x + y + c = 0$ con c parametro reale. Imponendo il passaggio per $Q(1, 1)$ troviamo che $8 + c = 0$ quindi $c = -8$ e quindi l'equazione cercata è $7x + y - 8 = 0$.

(d) Mettendo a sistema le equazioni cartesiane delle due rette si trova $R = (\frac{5}{9}, \frac{37}{9})$

5. (a) La retta contenente P e Q avrà come giacitura il sottospazio generato dal vettore $\overrightarrow{PQ} = (1, -\frac{1}{2})$, quindi conoscendo le coordinate di un suo punto (ad esempio P) possiamo scrivere l'equazione parametrica $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{2} - \frac{t}{2} \end{cases}$; da questa possiamo ricavare l'equazione cartesiana procedendo come nell'esercizio 2: $0 = \begin{vmatrix} x & y - \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{x}{2} - y + \frac{1}{2} \Leftrightarrow$ $x + 2y - 1 = 0$

(b) L'equazione del fascio Ψ è $\lambda(x - \frac{1}{2}) + \mu(y - \frac{1}{4}) = 0$; imponendo il passaggio per il punto $(1, \frac{1}{2})$ otteniamo $\frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{4} = 0$; possiamo prendere $\lambda = 1$ e $\mu = -2$ e otteniamo la retta $x - 2y = 0$. (alternativamente, si poteva cercare la retta passante per i punti $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ e $(1, \frac{1}{2})$ e procedere come nell'esercizio precedente)

(c) Se $r \cap s = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, allora ovviamente il punto $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ apparterrà a r' e a s', quindi r' sarà la retta di Φ_r passante per $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ e s' la retta di Φ_s passante per $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$. L'equazione di Φ_r è $x + 2y + c = 0$: imponendo il passaggio per $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ si trova $x + 2y - 2 = 0$; l'equazione della retta s' si troverà allo stesso modo: l'equazione di Φ_s è $x - 2y + c = 0$ e imponendo il passaggio per il punto si trova $x - 2y - 1 = 0$

6. Per mostrare che A è uno spazio affine su $\mathbb{R}$ è sufficiente trovare una funzione $f : A \times A \to \mathbb{R}$ che rispetti le proprietà SA1 e SA2. Una possibile funzione è la seguente: $f\big((x, x^2), (y, y^2)\big) \to y - x$. Mostriamo che valgono le due proprietà:

SA1 Verifichiamo che, fissato il primo punto $X = (x, x^2)$ e il vettore $v \in \mathbb{R}$, il punto $Y = (y, y^2)$ è univocamente determinato: $\overrightarrow{XY} = v \Rightarrow y - x = v \Rightarrow y = x + v$, quindi y è unico.

SA2 Consideriamo $X = (x, x^2)$, $Y = (y, y^2)$ e $Z = (z, z^2)$: si ha che $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = (y - x) + (z - y) = (z - x) = \overrightarrow{XZ}$

La dimostrazione che B è uno spazio affine è identica a questa.