Università degli Studi Roma Tre – Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2008-2009 – Docente: Prof. E. Sernesi
Tutori: Andrea Abbate e Matteo Acclavio

TUTORATO NUMERO 4 (18 MARZO 2009)
RANGO, DIMENSIONE, BASI, FORMULA DI GRASSMAN

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili ai seguenti indirizzi:
http://www.lifedreamers.it/liuck/
http://www.mat.uniroma3.it/

1. *(a)* Generano $\mathbb{R}^2$
   (b) Non generano $\mathbb{R}^2$
   (c) Non generano $\mathbb{R}^3$
   (d) Generano $\mathbb{R}^3$

2. *(a)* dim(*U*) = 3 perchè i tre vettori sono linearmente indipendenti, lo stesso vale per *W*; visto che l'unico sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 3 è $\mathbb{R}^3$ stesso, non c'è bisogno di fare conti per determinare la dimensione di *U*+*W* che sarà proprio 3, ovviamente dim $U \cap W$ = 3 (abbiamo già verificato che *U* = *W* = $\mathbb{R}^3$). La determinazione della base è un problema banale, bastarà infatti scegliere una qualsiasi base di $\mathbb{R}^3$, come ad esempio la base canonica. Si noti che anche i vettori che generano *U* e quelli che generano *W* sono una base di $\mathbb{R}^3$.

   (b) dim(*U*) = 2 infatti (1,5,3) = 3 (0,1,1) + (1,2,0) e dim(*W*) = 2 perchè (2,0,1) = (1,0,3) + (1,0,-2); le rispettive basi saranno quindi date da {(0,1,1), (1,2,0)} e {(1,0,3), (1,0,-2)}. (*oss. 1:* avremmo potuto scegliere altre coppie di vettori come base, con l'unica osservazione che i vettori siano linearmente indipendenti e che appartengano al sottospazio; *oss. 2:* sappiamo che le coppie scelte come base dei rispettivi sottospazi sono degli insiemi de vettori indipendenti in quanto due vettori sono linearmente indipendenti se e soltanto se uno è multiplo dell'altro). Per comodità cominciamo a determinare la dimensione e la base di *U* + *W.* Visto che l'insieme dei generatori di *U* e di *W* ha rango 3 allora la dim (*U* + *W*) = 3, ovvero *U* + *W* = $\mathbb{R}^3$. Come già osservato nel punto *(a)* di questo esercizio, basterà scegliere una qualsiasi base di $\mathbb{R}^3$ ad esempio quella canonica. Per la formula di Grassmann si ha che dim($U \cap W$) = 1. Per trovare una base di quest'ultimo sottospazio uso la seguente *oss.:* sia $\vec{v}=(x,y,z)\in U\cap W$ un vettore generico, allora $\vec{v}\in U$ e $\vec{v}\in W$, ossia $\vec{v}$ può essere scritto come combinazione lineare sia dei vettori della base di *U* che di quelli di *W*, allora cerco i valori *a, b, c, d* per cui si ha *a* (0,1,1) + *b* (1,2,0)= (x,y,z) = *c* (1,0,3) + *d* (1,0,-2); determinare i valori di *a, b, c, d* che risolvono la precedente equazione è equivalente a trovare le soluzioni del

seguente sistema lineare: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le soluzioni di questo sistema sono *{a = -2t, b = t, c = 0, d=t}*. Quindi i vettori di $U \cap W$ sono del tipo *-2t* (0,1,1) + *t* (1,2,0) = *t* (1,0,-2), e per trovare una base basterà fissare un valore di $t \neq 0$ (vogliamo una base dello spazio, quindi un vettore diverso dal vettore nullo), ad esempio 1 (si poteva prendere un qualsiasi altro valore per *t*), quindi $U \cap W$ = <(1,0,-2)>.

(c) dim(*U*) = 3 e *U* = <(0,1,1,0), (1,0,2,1), (1,0,1,1)>. dim(*W*) = 3 e *W* = <(1,1,1,1), (2,1,1,0), (0,1,1,2)>. dim(*U* + *W*) = 4 ossia *U* + *W* = $\mathbb{R}^4$. Infine dim($U \cap W$)= 2 e $U \cap W$ = <(1,1,1,1), (1,4,2,1)> (il procedimento è identico a quello sviluppato nel punto *(b)* di questo esercizio.

(d) dim(*U*) = 3 e *U* = <(2,1,1,1), (1,1,2,3), (3,2,0,1)>. dim(*W*) = 3 e *W* = <(2,0,3,0), (1,0,0,3), (3,1,2,0)>. dim(*U* + *W*) = 4 ossia *U* + *W* = $\mathbb{R}^4$. Infine dim($U \cap W$)= 2 e $U \cap W$ = <(1,1,-1,0), (3,0,4,1)>.

3. *(a)* Una base per il sottospazio è {(3,2,1), (2,0,1)}. Per poter completare questo insieme ad una base di $\mathbb{R}^3$ basta trovare un vettore linearmente indipendente con quei due (ne basta uno solo perchè dim($\mathbb{R}^3$) - dim(*V*) = 1), Per semplificarci i calcoli, possiamo sceglierlo tra quelli della base canonica. (*oss.:* siamo sicuri che almenno un vettore della base canonica non stia in *V*, perchè se così fosse avremmo che *V* contiene la base canonica, quindi per definizione di sottospazio vettoriale contiene anche tutte le combinazioni lineari dei vettori della base, ossia tutto $\mathbb{R}^3$). Si vede che il vettore e_1 = (1,0,0) va bene, quindi la base di *V* può essere completata con (1,0,0). (Si noti che questo non è l'unico completamento possibile: andavano bene, ad esempio, anche e_2 oppure e_3).

   (b) Una base per il sottospazio è {(1,0,1), (0,1,2)}, e si può completare con (0,1,0).

   (c) Una base per il sottospazio è {(0,1,1,1), (1,2,3,0), (2,6,8,4)} e si può completare con (1,0,0,0).

   (d) Una base per il sottospazio è {(1,0,1,2), (3,0,1,2), (2,0,0,1)}, e si può completare con (0,1,0,0).

4. *r (A)* = 3 *r (B)* = 2 *r (C)* = 2 *r (D)* = 2

   r (AB) = 2 *r (BC)* = $r\begin{pmatrix} -2 & 10 \\ -2 & 26 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 2$ *r (CD)* = $r\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$

   r (DA) = 2. Si noti che per calcolare *r (AB)* e *r (DA)* non è stato necessario esplicitare il prodotto: è sufficiente sapere che se $A \in GL_m(K)$, $B \in M_{m,n}(K)$ e $C \in GL_n(K)$, allora *r (AB) = r (B) = r (BC).*

5. Chiamiamo A il vettore colonna $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ e B il vettore riga $\begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_m \end{pmatrix}$:

$\Leftarrow$ A e B hanno rispettivamente una sola colonna e una sola riga, quindi hanno entrambi rango 1. Di conseguenza, essendo $r(AB) \le min(r(A), r(B))$ si avrà $r(AB) \le 1$.

$\Rightarrow$ Se $r(M) = 0$, M è la matrice nulla quindi basterà prendere come A il vettore nullo e come B un vettore qualsiasi (o viceversa). Se $r(M) = 1$, tutte le colonne di M sono multipli di una sola colonna non nulla, supponiamo sia la k-esima. Avremo quindi che $M_{(i)} = c_i M_{(k)}$, per ogni i = 1,...,k-1, k+1,...m e per opportuni scalari c_i. Scegliendo quindi $A = M_{(k)}$ e $B = (c_1,\ldots,1\ldots,c_m)$ (con 1 nella posizione k-esima) si ha l'asserto.