Università degli Studi Roma Tre – Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2008-2009 – Docente: Prof. E. Sernesi

Tutori: Andrea Abbate e Matteo Acclavio

TUTORATO NUMERO 2 (5 MARZO 2009)
SISTEMI LINEARI E MATRICI INVERSE

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili ai seguenti indirizzi:
http://www.lifedreamers.it/liuck/
http://www.mat.uniroma3.it/

1. *a)* ∃! soluzione: $(1,0)$.
   b) il sistema è incompatibile.
   c) ∃! soluzione: $(\frac{10}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{5})$.
   d) ∃ ∞^1 soluzioni del tipo $(-\frac{t}{3},1,t)$.
   e) il sistema è incompatibile.
   f) ∃ ∞^1 soluzioni del tipo $(1-t,-t,t)$.
   g) il sistema è incompatibile.
   h) ∃! soluzione: $(-\frac{1}{3},1,0)$
   i) ∃ ∞^1 soluzioni del tipo $(-t-3,0,t,2)$.
   j) ∃ ∞^2 soluzioni del tipo $(1-t,-\frac{(4s+2t-1)}{3},s,t)$.

2. Se A è una matrice invertibile si ha $\mathbf{1}_n = {}^t\mathbf{1}_n = {}^t(A\,A^{-1}) = {}^t(A^{-1})\,{}^tA$. Quindi, $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$. Inoltre, poiché $A\,A^{-1} = \mathbf{1}_n = {}^tA\,{}^t(A^{-1})$, se $A = {}^tA$ allora $A^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

3. (←) Basta effettuare il prodotto di $A\,A^{-1}$ per constatare che la matrice A è invertibile.
   (→) Per ipotesi so che ∃ $B \in M_n(K)$ t.c. $BA = \mathbf{1}_n$, con B nella forma $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$ ma allora eplicitando il prodotto AB ottengo che $BA =$
   $$\begin{pmatrix} b_{11}a_{11}+\ldots+b_{1n}a_{n1}, & \cdots & ,b_{11}a_{1n}+\ldots+b_{1n}a_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}a_{11}+\ldots+b_{nn}a_{n1}, & \cdots & ,b_{n1}a_{1n}+\ldots+b_{nn}a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} b_{11}a_{11} & \cdots & \cdots & b_{1\mathrm{n}}a_{nn} \\ b_{21}a_{11} & b_{22}a_{22} & \cdots & b_{2\mathrm{n}}a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}a_{11} & \cdots & \cdots & b_{nn}a_{nn} \end{pmatrix} = \mathbf{1}_n$$ proprio per come è definita A. Ma allora è facile vedere che $b_{ij}\ a_{jj} = \delta_{ij}$ con i,j = 1...n, dove δ_{ij} è il simbolo di Kronecher (vale 1 se i=j, vale 0 se $i \neq j$). Da ciò si deduce che se esistesse almeno un a_{jj} = 0 la matrice A non sarebbe invertibile.

In conclusione ho che $b_{jj}\ a_{jj}$ = 1 $\forall j$ = 1,...,n mentre il resto dei coefficienti della matrice BA è uguale a 0, ma allora $b_{jj} = (a_{jj})^{-1}$ e b_{ij} = 0 (se $i \neq j$) che è proprio ciò che si voleva dimostrare.