Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica – a.a. 2008/2009
GE1 – Geometria 1, Algebra Lineare
Prima prova di valutazione in itinere – 7 Aprile 2009

Esercizio 1. Si discutano i seguenti sistemi lineari

$$\begin{cases} hX + Y + 2Z = 1 \\ X + hY + Z = 2 \\ X - Y + Z = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} hX + Y = 2 \\ X + hY = 1 \\ X - Y = 1 \end{cases},$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Si considerino le matrici

$$N_1 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; N_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \; N_3 := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \; N_4 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N_5 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; F := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e siano

$$X := \{A \in M_{2,3}(\mathbb{R}) : AE = FA\}, \quad Y := < N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 >_{\mathbb{R}}$$
$$Z := \{A \in M_{2,3}(\mathbb{R}) : FA = N_1\}.$$

(i) Si verifichi che X, Y sono $\mathbb{R}-$sottospazi vettoriali di $M_{2,3}(\mathbb{R})$, si determini dimensione e una base di $X, Y, X+Y, X \cap Y$, si dica se la somma $X+Y$ è diretta, e si completi una base di $X+Y$ a una base di $M_{2,3}(\mathbb{R})$.

(ii) Si mostri che non esiste alcun $\mathbb{R}-$sottospazio vettoriale T di $M_{2,3}(\mathbb{R})$ tale che

$$\dim_{\mathbb{R}}(T) = 4 \text{ e } T \cap Y \subsetneq X \cap Y.$$

(iii) Si stabilisca, motivando la risposta, se Z è un $\mathbb{R}-$sottospazio vettoriale di $M_{2,3}(\mathbb{R})$.

Esercizio 3. Si determini il rango della matrice

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

senza fare uso del principio dei minori orlati.

Cenni della soluzione

Esercizio 1. Sia A la matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} hX + Y + 2Z = 1 \\ X + hY + Z = 2 \\ X - Y + Z = -1 \end{cases}.$$

Si verifica immediatamente che $\det(A) = 0$ se, e soltanto se, $h = 2, -1$. Dunque, per ogni $h \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ il sistema ammette una e una sola soluzione, precisamente

$$x = y = \frac{3}{h+1}, z = -1.$$

Per $h = -1$ il sistema è incompatibile perché, detta C la sua matrice completa, si ha $\mathrm{rg}(A) = 2 \neq 3 = \mathrm{rg}(C)$. Per $h = 2$ si ha $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(C) = 2$, e quindi il sistema ha ∞^1-soluzioni, precisamente $(-t, 1, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Osserviamo adesso che la matrice completa del sistema

$$\begin{cases} hX + Y = 2 \\ X + hY = 1 \\ X - Y = 1 \end{cases}$$

è A. Siccome la matrice dei coefficienti B di tale sistema ha rango al più due, segue immediatamente che per ogni $h \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ il sistema è incompatibile. Infatti, per quanto visto in precedenza, per tali valori di h si ha $\mathrm{rg}(A) = 3 > \mathrm{rg}(B)$. Per $h = -1$ si ha $\mathrm{rg}(B) = 1 \neq 2 = \mathrm{rg}(A)$, e quindi il sistema è incompatibile. Per $h = 2$ si ha $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = 2$, e il sistema ammette l'unica soluzione $(1, 0)$.

Esercizio 2. Una matrice a coefficienti reali

$$A := \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

appartiene all'insieme X se, e soltanto se, $AE = FA$. Si verifica immediatamente che

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

se, e soltanto se,

$$\begin{pmatrix} a & 2b & b+c \\ d & 2e & e+f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \end{pmatrix},$$

ovvero se $b = d = e = f = 0$, come si verifica senza difficoltà. Dunque X è l'insieme di tutte e sole le matrici della forma

$$\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con $a, c \in \mathbb{R}$. Questo mostra che

$$X =< \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} >_{\mathbb{R}},$$

e, in particolare, X è un $\mathbb{R}-$sottospazio vettoriale di $M_{2,3}(\mathbb{R})$. Essendo le matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

linearmente indipendenti, si ha $\dim_{\mathbb{R}}(X) = 2$.
Per come è definito, Y è un $\mathbb{R}-$sottospazio vettoriale di $M_{2,3}(\mathbb{R})$. Poiché $N_3 = 2N_1 - N_2$, si

ha $Y =< N_1, N_2, N_4, N_5 >_{\mathbb{R}}$. Inoltre si verifica senza difficoltà che l'insieme $\{N_1, N_2, N_4, N_5\}$ è linearmente indipendente, e quindi è una base di Y. In particolare segue $\dim_{\mathbb{R}}(Y) = 4$. Dalle definizioni e dal fatto che

$$2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N_1,$$

segue che

$$X + Y =< \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N_2, N_4, N_5 >_{\mathbb{R}} .$$

Poiché tale sistema di generatori è anche linearmente indipendente (come si mostra con semplici calcoli), segue che esso costituisce una base di $X+Y$ e quindi $\dim_{\mathbb{R}}(X+Y) = 5$. In virtù dell'uguaglianza di Grassmann, si ha $\dim_{\mathbb{R}}(X \cap Y) = \dim_{\mathbb{R}}(X) + \dim_{\mathbb{R}}(Y) - \dim_{\mathbb{R}}(X + Y) = 2 + 4 - 5 = 1$. Inoltre, da quanto osservato prima, segue che

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in X \cap Y.$$

Dunque si ha, per definizione,

$$< \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} >_{\mathbb{R}} \subseteq X \cap Y.$$

Poiché $\dim_{\mathbb{R}}(X \cap Y) = \dim_{\mathbb{R}}(< \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} >_{\mathbb{R}})$, segue che

$$< \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} >_{\mathbb{R}} = X \cap Y.$$

Essendo, in particolare, $X \cap Y$ uno $\mathbb{R}-$spazio vettoriale non nullo, si ha che la somma $X+Y$ non è diretta.
Possiamo completare la base

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N_2, N_4, N_5 \right\}$$

di $X + Y$ a una base di $M_{2,3}(\mathbb{R})$ aggiungendo la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Infatti, l'insieme $\mathcal{B} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ è linearmente indipendente (per esempio, perché $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \notin X+Y$) e ha $6 = \dim_{\mathbb{R}}(M_{2,3}(\mathbb{R}))$ elementi.

Supponiamo, per assurdo, che esista un $\mathbb{R}-$sottospazio vettoriale T di $M_{2,3}(\mathbb{R})$ tale che $\dim_{\mathbb{R}}(T) = 4$ e $T \cap Y \subseteq X \cap Y$. Dall'ultima inclusione e da quanto visto prima segue che $\dim_{\mathbb{R}}(T \cap Y) \leq \dim_{\mathbb{R}}(X \cap Y) = 1$. D'altra parte, l'uguaglianza di Grassmann mostra che $\dim_{\mathbb{R}}(T + Y) = \dim_{\mathbb{R}}(T) + \dim_{\mathbb{R}}(Y) - \dim_{\mathbb{R}}(T \cap Y) = 4 + 4 - \dim_{\mathbb{R}}(T \cap Y) \geq 7$, una contraddizione. Infatti, $T + Y$ è un $\mathbb{R}-$sottospazio vettoriale di $M_{2,3}(\mathbb{R})$, e quindi $\dim_{\mathbb{R}}(T + Y) \leq \dim_{\mathbb{R}}(M_{2,3}(\mathbb{R})) = 6$.

Z non è un $\mathbb{R}-$sottospazio vettoriale di $M_{2,3}(\mathbb{R})$ perché, per esempio, non contiene la matrice nulla (che è il vettore nullo dello spazio vettoriale $M_{2,3}(\mathbb{R})$).

Esercizio 3. Si verifica subito che le matrici

$$A_1 := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

hanno rango 2. Dunque, come è ben noto, si ha $\mathrm{rg}(A) \leq \min\{\mathrm{rg}(A_1), \mathrm{rg}(A_2)\} = 2$. D'altra parte, si ha

$$A = A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & -3 & 3 \\ -2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

e $\det(A(34 \mid 34))$ è un minore non nullo di ordine 2 di A. Segue $\mathrm{rg}(A) = 2$.