Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica – a.a. 2008/2009
GE1 – Geometria 1, Algebra Lineare
Appello X – 10 Settembre 2009

Esercizio 1. Sia $h \in \mathbb{R}$.

(i) Si risolva il sistema lineare

$$\begin{cases} X + (2+h)Y + Z = 1 \\ X + hY + Z = h \\ hX + Y + Z = 2h \end{cases}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

(ii) Si determini dimensione e una base del sottospazio vettoriale S di $\mathbb{R}^4$ costituito dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} X + (2+h)Y + Z + T = 0 \\ X + hY + Z + hT = 0 \\ hX + Y + Z + 2hT = 0 \end{cases}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

(iii) Per $h = 1$, si completi una base di S a una base di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 2. Siano X uno spazio vettoriale reale di dimensione 3 e $\mathcal{X} := \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ una sua base.

(i) Si verifichi che $\mathcal{B} := \{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_1\}$ è una base di X e si deduca che esiste un'unica applicazione lineare $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad f(\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f(\mathbf{x}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(ii) Si determini $M_{\mathcal{E}\mathcal{X}}(f), M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(f)$, dove $\mathcal{E}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{C} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$, e si trovi una base di $\mathrm{Ker}(f)$.

(iii) Detta $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow X$ l'applicazione lineare definita ponendo

$$g(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) := a\mathbf{x}_1 - b\mathbf{x}_2$$

si determini, se esiste, una base di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori di $f \circ g$.

Esercizio 3. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine reale di dimensione 3 in cui sia fissato un riferimento affine, e siano $\mathscr{R}, \mathscr{S} \subset \mathbb{A}$ le rette di equazioni (parametriche e cartesiane, rispettivamente)

$$\mathscr{R} : \begin{cases} X = 1 - t \\ Y = 2 - ht \\ Z = 3 - t \end{cases} \qquad \mathscr{S} : \begin{cases} X - Z - 1 = 0 \\ X - 2Y + Z - 3 = 0 \end{cases},$$

con $h \in \mathbb{R}$.

(i) Si determini la posizione reciproca di $\mathscr{R}$ e $\mathscr{S}$, al variare di $h \in \mathbb{R}$, e si stabilisca se $\mathscr{R} \neq \mathscr{S}$, per ogni $h \in \mathbb{R}$.

(ii) Per l'unico valore di h per cui $\mathscr{R}, \mathscr{S}$ sono parallele, si determini il piano che le contiene entrambe.

SOLUZIONI

1) (i) La matrice dei coefficienti ha determinante $2h-2$. Quando $h=1$ essa ha rango 2, mentre la matrice orlata ha rango 3. Dal teorema di Rouche-Capelli segue che il sistema è incompatibile se $h=1$, mentre per $h\neq 1$ possiede un'unica soluzione, che si può calcolare utilizzando la regola di Cramer, ed è

$$\left(\frac{-h^2+4h-1}{2h-2}, \frac{-h^2+2h-1}{2h-2}, \frac{h^3+h^2-5h+1}{2h-2}\right)$$

(ii) Il sistema è omogeneo e ha per matrice dei coefficienti la matrice orlata del sistema considerato nella prima parte. Quindi per ogni $h\in\mathbb{R}$ la matrice ha rango 3 e quindi ci sono sempre ∞^1 soluzioni. Per $h=1$ una base di S è data dal vettore $(1,0,-1,0)$. Una base di $\mathbb{R}^4$ che lo contiene come primo vettore è $\{(1,0,-1,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$.

(2) (i) La condizione $0=a(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)+b(\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3)+c\mathbf{x}_1=(a+c)\mathbf{x}_1+(a+b)\mathbf{x}_2+b\mathbf{x}_3$ fornisce il sistema $a+c=0, a+b=0, b=0$ che possiede solo la soluzione banale e quindi i tre vettori sono indipendenti. Pertanto costituiscono una base perché X ha dimensione 3. L'applicazione f esiste ed è unica per il teorema 11.3 pag. 137.

(ii) Utilizzando la definizione di f e la sua linearità si calcola che

$$f(\mathbf{x}_1)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{x}_2)=f(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)-f(\mathbf{x}_1)=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{x}_3)=f(\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3)-f(\mathbf{x}_2)=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

Quindi $M_{\mathcal{E}\mathcal{X}}(f)=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&0&1\end{pmatrix}$. Inoltre:

$$M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(f)=M_{\mathcal{C}\mathcal{E}}(1)M_{\mathcal{E}\mathcal{B}}(f)=M_{\mathcal{E}\mathcal{C}}(1)^{-1}M_{\mathcal{E}\mathcal{B}}(f)$$

dove $M_{\mathcal{E}\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}0&1&1\\2&1&2\end{pmatrix}$ e $M_{\mathcal{E}\mathcal{C}}(1)^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$. Pertanto:

$$M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\2&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

Poiché f ha rango 2 il $N(f)$ ha dimensione 1. I suoi vettori si determinano risolvendo il sistema $a\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, le cui soluzioni sono $(t,-3t,-2t)$. Quindi una base di $N(f)$ è $(1,-3,-2)$.

(iii) Si calcola subito che $(f\circ g)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ e $(f\circ g)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Pertanto $M_{\mathcal{E}}(f\circ g)=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico di questa matrice è T^2-T-2 e le sue radici sono $-1, 2$. Segue che $f\circ g$ ha due autovalori distinti e quindi è diagonalizzabile.

(3) La retta $\mathscr{S}$ ha vettore di direzione $(1,1,1)$, mentre la retta $\mathscr{R}$ ha vettore di direzione $(-1,-h,-1)$. Questi due vettori sono paralleli se e solo se $h=1$. Segue che $h=1$ è l'unico valore per cui le due rette sono parallele. Per tale valore le due rette sono distinte perché la retta $\mathscr{S}$ non contiene il punto $(1,2,3)$, che invece appartiene a $\mathscr{R}$. Eguagliando a zero due dei minori della matrice $\begin{pmatrix}X-1&Y-2&Z-3\\-1&-h&-1\end{pmatrix}$ si ottengono equazioni cartesiane di

$\mathscr{R}$: $-hX+Y+h-2=0, \quad -Y+hZ-3h+2=0$. Il determinante dei coefficienti delle equazioni delle due rette è:

$$\begin{vmatrix} -h & 1 & 0 & h-2 \\ 0 & -1 & h & -3h+2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 6h^2-6h$$

Quindi le due rette sono sghembe per $h \neq 0, 1$ e complanari e non parallele per $h=0$. In particolare sono sempre distinte. Il piano contenente $\mathscr{R}, \mathscr{S}$ per $h=1$ è $Y-Z+1=0$.