Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AC310 (ex AC1)

A.A. 2011-2012 - Docente: Prof. E. Sernesi

Tutori: Giacomo Milizia e Dario Spirito

TUTORATO 9
14 DICEMBRE 2011

1. Calcolare il residuo all'infinito delle seguenti funzioni:

   a) $z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right)$

   b) $\exp\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z(2-z^3)}$

2. Calcolare usando la formula di Cauchy:

   a) $\int_{|z|=\pi} \frac{1+\cos(z)}{z^4} \mathrm{d}z$

   b) $\int_{|z|=1} \frac{\exp(\exp(z))}{z^2}$

   c) $\int_{|z-2|=1} \frac{\sinh(z)\cosh(z)}{z}$

3. Determinare le regioni di convergenza delle seguenti serie:

   a) $\sum_{n\geq 0} \frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)}$

   b) $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2 \cdot 3^n}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n$

   c) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n$

   d) $\sum_{n\geq 0} \frac{z^{-n}}{n!}$

   e) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} 3^{-|n|} z^{2n}$

4. Calcolare i seguenti integrali:

   a) $\int_{|z|=1} e^{-1/z} \sin\left(\frac{1}{z}\right) \mathrm{d}z$

   b) $\int_{|z|=2} \frac{z+1}{z(z-3)(z^2+1)} \mathrm{d}z$

   c) $\int_{|z|=10} \frac{2z^3+15z^2+35z+25}{z^4+10z^3+35z^2+50z+24} \mathrm{d}z$

5. Sia $f(z) = \frac{(z^2+1)^2}{(z^2+2z+2)^3}$. Calcolare $\int_{|z|=4} \frac{f'}{f} \mathrm{d}z$

6. Sviluppare $f(z) = \exp\left(\frac{z}{z-2}\right)$ in serie di Laurent attorno a 2 e determinarne la regione di convergenza.

7. Calcolare i seguenti integrali:

   a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^4} \mathrm{d}x$

   b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \tan(t+i) \mathrm{d}t$

   c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9} \mathrm{d}x$

8. Trovare il numero di zeri di $f(z) = z^4 + 12z^3 + 3z^2 - 2z - 1$ in $B_{10}(0) \setminus B_1(0)$.

9. Sia $f(z) = \dfrac{z(z-2)}{(z^2+1)\cos(z)} e^{1/z}$. Determinare l'aperto massimale Ω di $\hat{\mathbb{C}}$ dove è olomorfa, i suoi zeri e le sue singolarità isolate; determinare l'ordine degli zeri e il tipo di singolarità.

10. Sia A un insieme discreto e f una funzione olomorfa in $\mathbb{C} \setminus A$. Dimostrare che se f è limitata allora è costante.

11. Dimostrare che z_0 è una singolarità essenziale per la funzione f se e solo se lo è per f'; dimostrare inoltre che se f è meromorfa in Ω lo è anche f', e determinare gli ordini dei poli di f' in funzione di quelli di f.

12. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni olomorfe in Ω che converge uniformemente sui compatti a una funzione f; supponiamo che ogni f_n abbia al più m zeri in Ω. Dimostrare che f ha al più m zeri in Ω.

13. Dimostrare il teorema fondamentale dell'algebra attraverso il teorema di Rouché.