

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica  
**Tutorato di AC310 (ex AC1)**  
A.A. 2011-2012 - Docente: Prof. E. Sernesi  
Tutori: Giacomo Milizia e Dario Spirito

TUTORATO 5  
26 OTTOBRE 2011

*Tutte le curve sono percorse in senso antiorario, eccetto dove espressamente indicato.*

1. Senza fare calcoli, spiegare perché l'integrale reale<sup>1</sup>  $\int_0^{2\pi} e^{ix} dx$  vale 0.
2. Calcolare  $\int_{\gamma} \operatorname{Im}(z^2) dz$ , dove  $\gamma := \{|z| = 1, -\pi \leq \arg(z) \leq 0\}$ .
3. Calcolare  $\int_{\gamma} |z| dz$ , dove  $\gamma = \{z|x^2 + y^2 = 1, -\pi \leq \arg(z) \leq 0\}$ .
4. Per ogni  $n \in \mathbb{Z}$ , calcolare  $\int_{\gamma} z^n dz$ , dove  $\gamma$  è la circonferenza unitaria percorsa in senso orario.
5. Calcolare  $\int_{\gamma} z^3 dz$ , dove  $\gamma := \{y = x^2 + 1 | x \in (0, 1)\}$ .
6. Trovare i valori di  $a \in \mathbb{C}$  per cui  $\int_{\gamma} (z - a\bar{z}) dz = 0$ , dove  $\gamma$  è la circonferenza unitaria.
7. Calcolare tutti i possibili valori di  $\int_{\gamma} \sqrt{z} dz$ , dove  $\gamma := \{|z| = 1, -\pi \leq \arg(z) \leq 0\}$ .
8. Calcolare i seguenti integrali spiegando perché non è necessario specificare l'arco d'integrazione:
  - a)  $\int_1^i z e^z dz$
  - b)  $\int_1^i (3z^4 - 2z^3) dz$
  - c)  $\int_0^{i+1} z^3 dz$
  - d)  $\int_1^i z \sin z dz$
9. Sviluppare in serie di potenze in  $z_0 = 3$  la funzione  $f(z) = \frac{1}{3 - 2z}$ .
10. Sviluppare in serie di potenze in  $z_0 = 0$  le seguenti funzioni, determinandone il raggio di convergenza:
  - a)  $f(z) = \frac{z}{z^2 + i}$
  - b)  $f(z) = \sinh^2\left(\frac{z}{2}\right)$

<sup>1</sup>Ovvero l'integrale di una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$