Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AC310 (ex AC1)

A.A. 2011-2012 - Docente: Prof. E. Sernesi

Tutori: Giacomo Milizia e Dario Spirito

TUTORATO 4
19 OTTOBRE 2011

1. Dire quali delle seguenti funzioni sono isomorfismi analitici locali nel punto indicato:

   a) $\sin(z^2)$ in $z = 0$

   b) $(\sin z)^2$ in $z = 0$

   c) $f(z) = \dfrac{z-1}{z-2}$ in $z = 0$

   d) $f(z) = \sinh(\sinh(z^3))$ in $z = i$

2. Sia log la corrispondenza multivoca. Riconoscere la falsità della tesi trovando l'errore:

$$\log(-z)^2 = \log(z^2) \Rightarrow \log(-z) + \log(-z) = \log z + \log z \Rightarrow 2\log(-z) = 2\log z \Rightarrow$$

$$\log(-z) = \log z$$

3. Determinare uno sviluppo in serie nel punto $a = 1$ di una determinazione della funzione $f(z) = i \log z$ in modo che $f(1) = -2\pi$.

4. Dimostrare o trovare un controesempio: se f è analitica in Ω e $f'(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega$, allora f è iniettiva.

5. È valido un "principio del minimo" analogo al principio del massimo? (Ovvero: è vero che il modulo di una funzione analitica non assume minimo su una regione?) Se no, quali sono le ipotesi minimali per cui vale?

6. Sia $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione analitica, con U aperto connesso. Dimostrare che se $\mathrm{Re}(f)$ o $\mathrm{Im}(f)$ hanno un massimo in U allora f è costante.

7. Siano $a, b \in \mathbb{C}$ tali che $|a| = |b| = 1$. Dimostrare che esiste un z di norma unitaria tale che $|z-a||z-b| \geq 1$. Se invece $|a| = |b| = R > 0$, quale analoga disuguaglianza vale per un punto di norma R?

8. Sia f una funzione analitica in $B_1(0)$ tale che che $|f(z)| \leq 1$ e $f(0) = 0$. Dimostrare che, se $|f(z)| = |z|$ per un z oppure $|f'(0)| = 1$ allora $f(z) = \lambda z$, con $\lambda \in \mathbb{C}$ di norma 1.

9. Sia $|\alpha| < 1$, e sia $\phi_\alpha(z) = \dfrac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$.

   a) Scrivendone l'inversa, verificare che le ϕ_α sono funzioni olomorfe e biunivoche tra $\mathbb{C} \setminus \{\overline{\alpha}^{-1}\}$ e $\mathbb{C} \setminus \{-\overline{\alpha}^{-1}\}$

   b) Verificare che le ϕ_α sono automorfismi del disco unitario.

   c) Dimostrare che ogni automorfismo del disco unitario è una trasformazione lineare fratta.

   d) È vero che qualsiasi mappa biiettiva e olomorfa tra due dischi aperti è ancora una trasformazione lineare fratta?