Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AC310 (ex AC1)

A.A. 2011-2012 - Docente: Prof. E. Sernesi

Tutori: Giacomo Milizia e Dario Spirito

TUTORATO 7
23 NOVEMBRE 2011

1. Identificare e classificare le singolarità delle seguenti funzioni:

   a) $\dfrac{1}{z^2(z+i)}$

   b) $\sin\left(\dfrac{z}{z+1}\right)$

   c) $\dfrac{1}{(z+1)(z^4-1)}$

   d) $\dfrac{1}{\sinh(z^2)}$

   e) $\exp\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$

   f) $z\sin\left(\dfrac{1}{z}\right)$

   Soluzione.

   a) La funzione ha un polo semplice in $-i$.

   b) L'unica singolarità è in $z=-1$; con la trasformazione $w=\frac{z}{z+1}$, la singolarità è la stessa della funzione $\sin(w)$ in $w=\infty$, ovvero esenziale.

   c) Un polo di ordine 2 in -1, poli semplici in 1, i e $-i$.

   d) Poli di ordine 2 dove il seno iperbolico ha zeri, cioè in $k\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$.

   e)
   $$\exp\left(z+\frac{1}{z}\right)=\exp(z)\exp\left(\frac{1}{z}\right) \tag{1}$$
   L'unico singolarità è in 0; il fattore $\exp(z)$ non è rilevante, in quanto $\exp(0)\neq 0$, e quindi la singolarità è la stessa di $\exp\left(\frac{1}{z}\right)$, cioè essenziale.

   f) Espandendo $\sin\left(\frac{1}{z}\right)$ si vede facilmente che la singolarità è essenziale.

2. Sia f una funzione olomorfa con un polo in z_0 di ordine n. Dimostrare che f' ha un polo di ordine $n+1$ in z_0.

   Soluzione. Poiché f ha un polo di ordine n in z_0, $f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^n}$ con $g(z)$ olomorfa e non nulla in z_0; derivando entrambi i lati,
   $$f'(z)=\frac{-ng(z)}{(z-z_0)^{n+1}}+\frac{g'(z)}{(z-z_0)^n} \tag{2}$$
   che ha un polo di ordine $n+1$ in z_0: il primo addendo ha un polo di ordine $n+1$, il secondo di ordine n e quindi quest'ultimo non può "bilanciare" il primo.

3. Dimostrare che una serie di Laurent può essere differenziata termine a termine.

   Soluzione. Ponendo $f = f_1 + f_2$, includendo in f_1 tutti i termini di grado positivo e in f_2 gli altri, si ottiene che f_1 e f_2 sono serie di potenze (rispettivamente in $(z-z_0)$ e in $(z-z_0)^{-1}$), che quindi convergono uniformemente dentro (rispettivamente fuori) il disco di raggio R_1 (rispettivamente R_2), dove possono essere differenziate termine a termine. Nella corona circolare di convergenza, quindi, sia f_1 che f_2 possono essere derivate per serie, e così f.

4. Calcolare la serie di Laurent di:

   a) $\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3}$ in $z = 1$

   b) $(z-3)\sin\left(\dfrac{1}{z+2}\right)$ in $z = -2$

   c) $\dfrac{z - \sin z}{z^3}$ in $z = 0$

   d) $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$ in $z = -2$

   Soluzione.

   a) Ponendo $z - 1 = t$ la funzione diventa

$$f(t) = \frac{e^{2t+2}}{t^3} = e^2 \sum_{k\geq 0} \frac{2^k t^{k-3}}{k!} = e^2 \sum_{k\geq 0} \frac{2^k (z-1)^{k-3}}{k!} \tag{3}$$

   b) Ora $z + 2 = t$: quindi

$$f(t) = (t-5)\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!t^{2k+1}} = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!t^{2k}} - 5\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!t^{2k+1}} =$$

$$\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(z+2)^{2k}} - 5\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(z+2)^{2k+1}} \tag{4}$$

   c)

$$f(z) = \frac{z - \sin z}{z^3} = \frac{1}{z^3}(1 - \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}) = \frac{1}{z^3}(z - z + \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \cdots) =$$

$$(\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} + \cdots) = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k+3)!} \tag{5}$$

   d) Sia $z + 2 = t$. Avremo

$$f(t) = \frac{t-2}{t(t-1)} = \frac{2}{t} + \frac{1}{1-t} = \frac{2}{t} + \sum_{k\geq 0} t^k = \frac{2}{z+2} + \sum_{k\geq 0} (z+2)^k \tag{6}$$

5. Calcolare i residui delle seguenti funzioni in tutti i punti di $\mathbb{C}$:

a) $\dfrac{1}{z^2+5z+6}$

b) $\dfrac{z+4}{z^2-2z+1}$

c) $\dfrac{1}{(z^2-1)^2}$

d) $\cot(z)$

e) $\dfrac{\exp(z^2)-z\cos(z)}{z^5}$

f) $\dfrac{1}{\sin^2(z)}$

g) $\dfrac{P(z)}{z^n}$, $P \in \mathbb{C}[X]$

Soluzione.

a) $z^2+5z+6=(z+1)(z+5)$; quindi il residuo è $\frac{1}{4}$ in 1 e $-\frac{1}{4}$ in -5.

b) $\dfrac{z+4}{z^2-2z+1}=\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{5}{(z-1)^2}$ e il residuo è 1 (in quanto il secondo addendo non ha residuo).

c) $f(z)=\frac{1}{(z-1)^2}1\frac{1}{(z+1)^2}$. In 1 basta calcolare la derivata del secondo fattore in 1, in -1 la derivata del primo in -1; i risultati sono rispettivamente -1 e $\frac{1}{4}$.

d) La funzione ha poli dove il coseno ha zeri, e sono tutti poli di ordine 1;

$$\lim\left(\frac{z-z_0}{\cos(z)}\right)=\frac{1}{-\sin(z_0)} \tag{7}$$

e quindi il residuo è sempre -1.

e) Sviluppando in serie di potenze si ottine che il residuo è $\frac{1}{2}$.

f) La funzione ha poli di ordine 2 in ki ($k \in \mathbb{Z}$); derivando $\frac{(z-ki)^2}{\sin^2(z)}$ e calcolandolo in ki si ottiene 0, che quindi è il residuo. Osservazione: data la periodicità del seno, è sufficiente considerare i casi $k=0$ e $k=1$.

g) Il coefficiente del termine di grado $n-1$ di P.

6. Calcolare il residuo in 0 di $f(z)=\sinh\left(\dfrac{(z^2-12)\sin(z^{12}+e^z)}{(z-4)^2\exp(\cosh(z))}\right)-12\sin(z)\cos(z^2)$

   Soluzione. La funzione è olomorfa in 0, quindi il residuo è 0.

7. Sia Ω un aperto connesso e $z_0 \notin \Omega$. Dimostrare che se $\Omega \cup \{z_0\}$ è aperto allora Ω non è semplicemente connesso.

   Soluzione. Poiché $\Omega \cup \{z_0\}$ è aperto, esiste un disco $B_{2r}(z_0)$ contenutovi; sia dunque γ la frontiera di $B_r(z_0)$ percorsa in senso antiorario. La funzione $\frac{1}{z-z_0}$ è olomorfa in Ω, e il suo integrale su γ è $2\pi i$; dunque Ω non può essere semplicemente connesso.

   Osserviamo che questa situazione può capitare solo nel caso che z_0 sia un "buco" di Ω, e la dimostrazione è una formalizzazione di quest'idea.