Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AC310 (ex AC1)

A.A. 2011-2012 - Docente: Prof. E. Sernesi
Tutori: Giacomo Milizia e Dario Spirito

TUTORATO 5
26 OTTOBRE 2011

Tutte le curve sono percorse in senso antiorario, eccetto dove espressamente indicato.

1. Senza fare calcoli, spiegare perché l'integrale reale[1] $\int_0^{2\pi} e^{ix}\mathrm{d}x$ vale 0.

   Soluzione. $\int_0^{2\pi} e^{ix}\mathrm{d}x$ non è altro che la parametrizzazione dell'integrale complesso $i^{-1}\int_\gamma 1\mathrm{d}z$, dove γ è la circonferenza unitaria. Poiché la funzione 1 è olomorfa in $\overline{B_1(0)}$, l'integrale è 0.

2. Calcolare $\int_\gamma \mathrm{Im}(z^2)\mathrm{d}z$, dove $\gamma := \{|z| = 1, -\pi \leq \arg(z) \leq 0\}$.

   Soluzione. $\mathrm{Im}(z^2) = 2xy$; parametrizzando la curva come $\{e^{i\theta}| -\pi \leq \arg(z) \leq 0\}$, e ricordando che $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$$\int_\gamma \mathrm{Im}(z^2)\mathrm{d}z = \int_{-\pi}^0 2\cos\theta\sin\theta ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^0 2i\cos^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta - \int_{-\pi}^0 2\cos\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta =$$

$$= \frac{2}{3}\left(-i\cos^3\theta|_{-\pi}^0 - \sin^3\theta|_{-\pi}^0\right) = \frac{2}{3}(-i-(-(-1)^3)) = \frac{2(-1-i)}{3} \quad (1)$$

3. Calcolare $\int_\gamma |z|\mathrm{d}z$, dove $\gamma = \{z|x^2+y^2 = 1, -\pi \leq \arg(z) \leq 0\}$.

   Soluzione. La curva è un arco della circonferenza unitaria, quindi $|z| = 1$ e l'integrale è $\int_{-\pi}^0 1\cdot ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta = 2$.

4. Per ogni $n \in \mathbb{Z}$, calcolare $\int_\gamma z^n\mathrm{d}z$, dove γ è la circonferenza unitaria percorsa in senso orario.

   Soluzione. Parametrizzando γ come $\{e^{-it}, t \in [0, 2\pi)\}$ si ottiene

$$\int_\gamma z^n\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} e^{-int}(-i)e^{-it}\mathrm{d}t = -i\int_0^{2\pi} e^{-i(n+1)t}\mathrm{d}t$$

   Se $n = -1$ allora l'integrale è $-2\pi i$, altrimenti si ottiene $\int = -\frac{1}{n+1}e^{i(n+1)t}|_0^{2\pi} = 0$.

[1] Ovvero l'integrale di una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

5. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma z^3 \mathrm{d}z$, dove $\gamma := \{y = x^2 + 1 | x \in (0,1)\}$.

Soluzione. $A := \{x+iy | y = x^2+1, x \in (0,1)\} = \{t + i(t^2+1) | t \in (0,1)\}$ e la curva è C^1, quindi:

$$\int_A z^3 \mathrm{d}z = \int_0^1 (t + i(t^2+1))^3 (1 + i2t) \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 (t^3 - i(t^2+1)^3 + 3t^2 i(t^2+1) - 3t(t^2+1)^2)(1+i2t)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 (t^3 - i(t^6 + 1 + 3t^4 + 3t^2) + 3t^4 i + i3t^2 - 3t(t^4 + 1 + 2t^2))(1 + i2t)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 (-5t^3 - it^6 - 3t^5 - 3t - i)(1 + i2t)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 (2t^7 - 3t^5 - 5t^3 - t) + i(-7t^6 - 10t^4 - 6t^2 - 1)\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{4}t^8 - \frac{1}{2}t^6 - \frac{5}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 + i(-t^7 - 2t^5 - 2t^3 - t)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{5}{4} - \frac{1}{2} + i(-1 - 2 - 2 - 1) - (0 + i0) = -2 - 6i$$

6. Trovare i valori di $a \in \mathbb{C}$ per cui $\displaystyle\int_\gamma (z - a\overline{z})\mathrm{d}z = 0$, dove γ è la circonferenza unitaria.

Soluzione. Poiché $f(z) = z$ è olomorfa, $\int_\gamma z\mathrm{d}z = 0$. Invece, parametrizzando γ come $e^{i\theta}$,

$$\int_\gamma \overline{z}\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} i e^{i\theta} \mathrm{d}\theta = 2\pi i \tag{2}$$

e quindi $\displaystyle\int_\gamma (z - a\overline{z})\mathrm{d}z = 0 - a \cdot 2\pi i$ e quindi l'unica possibilità è $a = 0$.

7. Calcolare tutti i possibili valori di $\displaystyle\int_\gamma \sqrt{z}\mathrm{d}z$, dove $\gamma := \{|z| = 1, -\pi \leq \arg(z) \leq 0\}$.

Soluzione.

$$\sqrt{z} = \exp\left(\frac{1}{2}\operatorname{Log}(z)\right) = \exp\left(\frac{1}{2}(\log(z) + 2k\pi i)\right) = \exp\left(\frac{\log(z)}{2}\right) \cdot \exp(k\pi i) \tag{3}$$

e quindi esistono due "funzioni radice quadrata", una opposto dell'altra (a seconda che k sia pari o dispari), entrambe non possono essere definite su tutto $\mathbb{C}$ (e neppure su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$), ma invece possono esserlo sul semipiano inferiore. In notazione esponenziale, le due funzioni possono essere scritte $f_1(z) = \sqrt{\rho}\exp\left(i\frac{\theta}{2}\right)$ e $f_2(z) = -\sqrt{\rho}\exp\left(i\frac{\theta}{2}\right)$ (con $z = \rho\exp(i\theta)$). Parametrizzando

$$\int_\gamma f_1(z)\mathrm{d}z = \int_{-\pi}^{0} \exp\left(i\frac{\theta}{2}\right) i\exp(i\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{2}{3}\exp\left(\frac{3}{2}i\theta\right)\Bigg|_{-\pi}^{0} = \frac{4}{3} \tag{4}$$

e quindi $\displaystyle\int_\gamma f_1(z)\mathrm{d}z = -\frac{4}{3}$.

8. Calcolare i seguenti integrali spiegando perché non è necessario specificare l'arco d'integrazione:

a) $\displaystyle\int_1^i ze^z\mathrm{d}z$

b) $\displaystyle\int_1^i (3z^4 - 2z^3)\mathrm{d}z$

c) $\displaystyle\int_0^{i+1} z^3\mathrm{d}z$

d) $\displaystyle\int_1^i z\sin z\mathrm{d}z$

Soluzione. Essendo tutte le funzioni olomorfe, non è necessario specificare l'arco di integrazione: se infatti β e γ sono due curve, allora $\gamma - \beta$ è una curva chiusa, e quindi l'integrale su di essa è 0. Ne segue che l'integrale su β e quello su γ coincidono. Inoltre, è possibile calcolare l'integrale come un integrale reale, attraverso le primitive: i risultati che si ottengono sono dunque

a) $(1-i)e^i$

b) -1

c) $\frac{3}{5}i - \frac{3}{5}$

d) $-ie^{-i} + \cos 1 - \sin 1$

9. Sviluppare in serie di potenze in $z_0 = 3$ la funzione $f(z) = \dfrac{1}{3-2z}$.

Soluzione.

$$\frac{1}{3-2z} = \frac{1}{3-2(z-3)-6} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}(z-3)} = -\frac{1}{3}\sum_{k\geq 0}\left(\frac{2}{3}\right)^k (z-3)^k \tag{5}$$

10. Sviluppare in serie di potenze in $z_0 = 0$ le seguenti funzioni, determinandone il raggio di convergenza:

a) $f(z) = \dfrac{z}{z^2+i}$

b) $f(z) = \sinh^2\left(\dfrac{z}{2}\right)$

Soluzione.

a)

$$\frac{z}{z^2+i} = z\frac{1}{1+\frac{z^2}{i}} = z\sum_{k\geq 0}\left(-\frac{z^2}{i}\right)^k = \sum_{k\geq 0} i^k z^{2k+1} \tag{6}$$

e il raggio di convergenza è 1 (in quanto $|i^k| = 1$).

b)

$$\sinh^2\left(\frac{z}{2}\right) = \left(\frac{\exp(\frac{z}{2}) - \exp(-\frac{z}{2})}{2}\right)^2 = \frac{e^z + e^- z - 2}{4} =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k\geq 0}\frac{z^k}{k!} + \frac{1}{4}\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k z^k}{k!} - \frac{1}{2} = \sum_{k\geq 1}\frac{1+(-1)^k}{4k!}z^k \tag{7}$$

e il raggio di convergenza è infinito (il termine significativo è $\frac{1}{k!}$, e $\sqrt[k]{k!} \to \infty$).