Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica – a.a. 2011/2012
AC310
Appello X – 14 Settembre 2012

Esercizio 1 (7 punti). Determinare la corona circolare di convergenza della serie di Laurent

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{2}{z}\right)^n + \sum_{n\geq 0}\left(\frac{z}{4}\right)^n$$

In tale corona si determini la funzione $f(z)$ somma della serie. Dopo aver verificato che $f(z)$ è una funzione razionale, se ne calcolino i residui nei suoi poli. Si calcolino inoltre gli integrali:

$$\mathbf{I}(k) = \int_{\Gamma_k} f(z)dz$$

dove Γ_k è la circonferenza di centro 0 e raggio $k = 1, 3, 5$ rispettivamente.

Esercizio 2 (8 punti). Calcolare l'integrale trigonometrico:

$$\mathbf{I} = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2p\cos x + p^2}, \quad (0 < p < 1)$$

Esercizio 3 (7 punti). Calcolare il numero di radici del polinomio

$$g(z) = z^4 - 5z + 1$$

contenute nella corona circolare $1 < |z| < 2$.

Esercizio 4 (10 punti). a) Enunciare il teorema di Cauchy.

b) Si enunci e dimostri la formula integrale di Cauchy utilizzando il teorema di Cauchy.

Soluzioni

Esercizio 1. Corona: $2 < |z| < 4$.

$$f(z) = \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{z}} - 1 \right) + \frac{1}{1 - \frac{z}{4}} = \frac{-2z}{(z-2)(z-4)}$$

$$\mathrm{Res}_2(f) = 2, \quad \mathrm{Res}_4(f) = -4$$

$$\mathbf{I}(1) = 0,\ \mathbf{I}(3) = 4\pi i,\ \mathbf{I}(5) = -4\pi i$$

Esercizio 2. Ponendo $z = e^{ix}$, e mediante le sostituzioni $\cos x = \frac{z^2+1}{2z}$ e $dx = \frac{dz}{iz}$ si ottiene:

$$\mathbf{I} = \int_{|z|=1} \frac{idz}{pz^2 - (1+p^2)z + p}$$

che, calcolato con il metodo dei residui, risulta uguale a

$$\mathbf{I} = \frac{2\pi}{1 - p^2}$$

tenendo presente che il denominatore ha la sola radice p contenuta all'interno del disco unitario.

Esercizio 3. $g(z)$ ha 3 radici nella corona. Ciò si ottiene applicando il teorema di Rouché rispettivamente prendendo $f(z) = -5z$ e utilizzando la circonferenza unitaria, e $f(z) = z^4$ e utilizzando la circonferenza $|z| = 2$.