Quaderni dell'Unione Matematica Italiana

10

La didattica della matematica oggi

Problemi, ricerche, orientamenti

A cura di

C. Sitia

Pitagora Editrice • Bologna 1979

LA MATEMATICA MODERNA: ESISTE?

René Thom

Lo storico matematico del domani non potrà non meravigliarsi dell'estensione del movimento degli anni sessanta conosciuto come "matematica moderna". Pare che questo movimento abbia ora raggiunto il suo culmine e ormai cominciano a rendersi evidenti i primi segni di involuzione che costituiscono una ragionevole salutare reazione. Mi piacerebbe (forse un po' prematuramente) evidenziare in forma di bilancio o di rendiconto le cose, associate a questo movimento, che dovrebbero essere conservate, messe al loro giusto posto o puramente e semplicemente eliminate.

Non è un problema di conoscenza nè di tecnica pedagogica, ma una questione che investe un campo dove i sentimenti personali del matematico non possono non avere un ruolo essenziale. Solo gli spiriti dogmatici (che non mancano tra i "modernisti") possono credere che questi problemi abbiano una verità capace di essere fondata logicamente e davanti alla quale ci si debba inchinare.

Di conseguenza vedo questo articolo come un'arringa difensiva atta a contribuire al dibattito e non una dimostrazione che si sa bene inesistente.

"La matematica moderna" ha un'origine e una composizione assai complessa. Si può dire, a grandi linee, che essa mira a due obiettivi fondamentali:

(a) Il rinnovamento pedagogico nell'insegnamento della matematica.

Si critica la didattica dell'insegnamento tradizionale, anche per il suo dogmatismo, che è particolarmente evidente nell'insegnamento della geometria euclidea, così ci si assicura.

Si propone di sostituirlo con un insegnamento più diretto, più libero e costruttivo, orientato soprattutto verso l'approccio euristico che, per sua natura, è più atto a suscitare gli interessi e le attività individuali dell'alunno.

(b) La modernizzazione dei programmi.

Visto che la matematica, come si dice, ha progredito considerevolmente dai tempi di Cauchy, è strano che in molti paesi i programmi non abbiano fatto altrettanto. In particolare si pensa che l'introduzione nell'insegnamento delle grandi strutture della matematica ne semplificherà, in modo naturale, l'insegnamento perchè, così facendo, si offrono gli schemi universali che governano il pensiero matematico.

Si vuole osservare per essere precisi, che nessuno di questi due obiettivi è "moderno" e neppure recente. L'ansia per l'insegnamento della matematica in modo euristico o creativo non risale al recente passato (come mostra il contributo dato dal Prof. Pólya al congresso). Deriva direttamente dalla pedagogia del Rousseau e si potrebbe dire, senza esagerare, che gli educatori moderni potrebbero ancora ispirarsi alla pedagogia euristica esposta nella lezione che Socrate dà a un giovane schiavo di Menone (1). Per quanto riguarda il progredire della matematica, che richiederebbe una riorganizzazione dei programmi, si deve solo sottolineare l'imbarazzo e l'incertezza dei teorici moderni nel fissare la data della conclamata rivoluzione che tanto prontamente invocano: Evariste Galois, il fondatore della teoria dei gruppi, Weierstrass, il padre del rigore nell'analisi, Cantor, il creatore della teoria degli insiemi, Hilbert, che ha dato un fondamento assiomatico alla geometria, Bourbaki, che ha presentato sistematicamente la matematica contemporanea, così si citano molti nomi a caso e senza grande accuratezza teoretica per giustificare la riforma del curriculum.

E' difficile negare una certa validità ai due obiettivi (a) e (b). Tuttavia non ci sono molte speranze di raggiungerli entrambi in modo assoluto. Non intendo discutere l'obiettivo (a) (il rinnovamento pedagogico) a fondo:

(1) Si veda, per esempio, Plato, Five Dialogues, Everyman's Library, Dent-Dutton, London, 1910.

sono consapevole di non avere alcuna competenza in pedagogia, in cui mi riesce difficile vedere qualcosa di più di un'arte. Mi limiterò, quindi, in questo campo, ad argomenti piuttosto rozzi e di buon senso.

Per essere sicuro che l'alunno partecipi pienamente alla ricerca in atto, l'insegnante deve tenere un controllo costante sulle reazioni dello scolaro, per poter guidare i suoi passi e quelli del suo progredire. Idealmente ciò è difficile, tranne che in un tête-à-tête: inoltre, questo è stato il caso nell'esempio del dialogo socratico su menzionato. Ma quando un insegnante deve trattare con parecchi alunni simultaneamente, non può mantenere il controllo delle reazioni spesso divergenti di tutti i suoi allievi, ed è costretto a trascurarne alcuni. La fase successiva e l'ansia di essere efficace lo indurranno ad assumere un atteggiamento di guida per ritornare subito dopo all'insegnamento ex-cathedra. Inoltre gli sforzi diretti verso una pedagogia più libera sono necessariamente costosi: richiedono più insegnanti e insegnanti più aggiornati e più originali.

La società potrà permettere tali sforzi solo entro i limiti fissati dal bilancio finanziario. Per altro fare una teoria della creatività matematica è quasi una contraddizione in sè, perchè nulla si può descrivere in termini di tecnica e di rimedi meno facilmente dell'originalità creativa. Quando si usa un libro di testo, si stabilisce una didattica, un accademismo, anche se il libro è scritto in modo tale da promuovere la ricerca individuale. Si deve, quindi, concludere che gli sforzi per migliorare la pedagogia non finiranno mai?

Il punto (b) sulla modernizzazione dei programmi sembra anch'esso giustificato. Ma teniamo presente che, nonostante i recenti progressi nella nostra civiltà tecnica, le fasi dello sviluppo del bambino (fisiche o intellettuali) non sono state alterate. C'è sempre una fase di apprendistato necessario, di vincoli genetici da rispettare, per imparare a camminare, a parlare, a leggere, a scrivere e non sembra che la psicologia moderna sia stata capace di modificare in qualche modo il normale procedere di tali acquisizioni.

Ecco perchè ci si può legittimamente chiedere se lo stesso tipo di vincoli non siano operanti anche nell'apprendimento della matematica. Se questo è il caso, allora potrebbe rivelarsi illusoria la speranza di arrivare, per mezzo di una riorganizzazione generale dei curricula o dei metodi, ad un'accelerata consapevolezza delle grandi teorie della matematica contemporanea. E' certo che un gran numero di educatori "modernisti" hanno espresso questa speranza e sostenuto queste illusioni.

Da parte mia credo che esistano questi vincoli genetici, che essi formino parte integrante del temperamento e della personalità dell'alunno, e che per la loro stessa natura possano impedire a molti studenti (forse alla maggior parte dei ragazzi che entrano nella scuola secondaria) la comprensione della matematica a livello dei principi rudimentali del calcolo differenziale, meta che essi dovrebbero raggiungere se vogliono iscriversi ad una facoltà scientifica.

Ecco perchè non è ovvio che un avanzamento nella recente conoscenza si debba necessariamente riflettere nei programmi, specialmente a livello elementare e secondario.

Ma ammettiamo, essendone giunto il momento, la validità dei punti (a) e (b) presi separatamente. La cosa più strana, e più opinabile, nella posizione modernista, è il modo in cui si crede che questi due obiettivi si possano sintetizzare.

Si sono avanzate due argomentazioni a sostegno di questa pretesa.

i) La prima argomentazione è di natura tecnica: l'ho sentita un po' in sordina dai modernisti francesi e non so se esprime l'atteggiamento generale dei riformisti di altri paesi. Per riuscire nella riforma pedagogica, si deve superare l'inerzia, la "routine" proprie degli insegnanti; in vista di questo obiettivo si debbono cambiare i programmi. Cambiandone i contenuti, si potranno più facilmente cambiare i metodi.

Questa argomentazione tattica ha validità solo se diventa evidente che i nuovi strumenti didattici introdotti nell'insegnamento favoriscono decisamente un approccio euristico. Ora succede che i riformisti (almeno quelli dell'Europa Continentale) sono stati indotti, per la loro tendenza psicologica, ad abbandonare, da un lato, quel terreno che è un apprendistato ideale per l'indagine, quell'inesauribile miniera di esercizi che è la geometria euclidea, e, dall'altro, a sostituirla con le generalità sugli insiemi e la logica, cioè con un materiale il più possibile povero; vuoto e scoraggiante:l'intuizione.

ii) La seconda argomentazione è più seria. Gli psicopedagogisti, consapevoli della indeterminatezza della loro posizione dottrinale credevano di aver trovato la soluzione dei loro problemi nelle affermazioni dei logicisti e dei matematici formalisti. Poichè si riconosceva che la progressione del pensiero matematico era modellata da quei grandi schemi formali che sono le strutture – strutture di insieme e di logica, strutture algebriche e topologiche – che il bambino apprende nei primi anni di vita, la definizione e l'uso di queste strutture sarebbero sufficienti a dargli un facile accesso alle teorie matematiche contemporanee.

Questa argomentazione merita una discussione approfondita; sotto la sua convincente apparenza c'è un errore psicologico di base che invalida completamente lo sforzo del modernista. Ci si dovrebbe prima render conto che la maggior parte di queste grandi strutture astratte – teoria degli insiemi, algebra Booleana, strutture topologiche – sono già presenti qua e là nella psiche infantile in forma implicita, quando vengono proposte esplicitamente nell'insegnamento.

(Nel caso delle strutture algebriche ci sono motivi per fare delle distinzioni: alcune, quali quelle di gruppo, esistono allo stato implicito; altre, come quelle di anello e di campo, invece, sono molto più artificiali). Tutta l'argomentazione modernista si basa essenzialmente su questa ipotesi: *rendendo consci ed espliciti i meccanismi o le tecniche impliciti del pensiero, si rendono più facili le tecniche stesse.*

Ora ciò solleva un grosso problema psico-pedagogico che non è affatto proprio della matematica. Lo si trova, per esempio, nell'insegnamento delle lingue moderne: si deve insegnare ad un alunno una lingua in modo esplicito, partendo dai testi, istillando in lui la grammatica e il vocabolario di questa lingua? O gli si dovrebbe, invece, insegnare la lingua con l'uso diretto, come un bambino straniero l'apprenderebbe se fosse immerso nella società che parla questa lingua? La risposta non è facile, ma dal punto di vista dell'efficacia, il metodo diretto è spesso preferibile. Nel primo sviluppo del bambino, l'insegnamento esplicito deduttivo non ha parte alcuna: quando s'impara a camminare sarebbe più d'intralcio che d'aiuto conoscere (e capire) l'anatomia della gamba, e aver studiato la fisiologia del sistema digestivo non è affatto d'aiuto quando si deve digerire un pasto troppo pesante.

Senza dubbio mi si obietterà di aver usato esempi troppo rozzi, che non hanno niente in comune con quell'attività supremamente razionale che è il pensiero matematico. Ma ciò significherebbe dimenticare che la stessa ragione umana ha radici biologiche e che il pensiero matematico nasce dal bisogno dello spirito di stimolare la realtà esterna.

Riprenderemo più tardi questo punto. Un altro esempio abbastanza tipico di trasferimento dall'implicito all'esplicito è fornito dalla psicoanalisi che ha tentato di fare di questa trasposizione dal subconscio al conscio lo strumento essenziale della sua terapia. In questo caso, sembra che i risultati, nel trattamento dei disordini mentali, si siano rivelati alquanto deludenti. Conoscere la teoria dei lapsus freudiani non impedirà di commetterne.

Inoltre questo movimento dall'implicito all'esplicito, spesso inutile, può avere un cattivo influsso. Talvolta l'alunno non riesce a vedere la connessione tra un'attività mentale già presente nella sua mente e l'astratta descrizione simbolica che gli viene offerta (specialmente se questa presentazione è permeata dal pensiero formalistico); in tal caso, questo insegnamento rimarrà per lui lettera morta. Altre volte il bambino sospetta questa connessione senza raggiungerne una chiara comprensione. In questo caso la conoscenza esplicita della definizione formale dell'attività può sconvolgere questa attività che fino a quel momento funzionava senza teoria in modo molto efficace: proprio come capita a quegli individui che, consapevolmente, esitano a parlare una lingua perchè ne conoscono troppa grammatica e hanno paura di commettere degli errori.

Infine non si dovrebbe necessariamente credere che conoscendo le strutture standard della matematica si conosca ipso facto la matematica stessa; al contrario esse ne rappresentano soltanto gli aspetti più superficiali. Quando un biologo desidera studiare la fisiologia della deambulazione, la sua attenzione è rivolta immediatamente alle strutture che più colpiscono: le ossa e i legamenti; ma trascurerà, perchè non li conosce bene, tutti gli aspetti funzionali legati alla sincronizzazione delle contrazioni muscolari, i loro effetti meccanici sull'intero equilibrio, il sistema nervoso che li controlla e così via. Così la nostra analisi del processo del pensiero spiega soltanto i collegamenti più rozzi del ragionamento, mentre ne trascura le sottili interazioni, dovute al significato, che sono difficili da spiegare o formalizzare. Questi rozzi collegamenti appartengono al dominio della logica, del calcolo proposizionale. Ciò corrisponde alle strutture "superficiali" della linguistica che nel discorso comune sono costantemente sconvolte, piegate dalla richiesta delle strutture profonde del significato. (Vedere gli esempi che ho fatto in (1)). Certamente, di norma, non capita lo stesso in matematica, dove le regole combinatorie delle strutture non permettono alcuna eccezione. Non è così ovvio: i paradossi della teoria degli insiemi si originano chiaramente perchè non si vogliono ammettere eccezioni alla validità di certi assiomi; e nella matematica ordinaria è con un salto nell'infinito e nel continuo che l'eccezione si materializza (cf. ciò che ho detto in (1) sul "salto semantico"). Ma ritorniamo al nostro problema: è di qualche validità trasformare in conoscenza esplicita un meccanismo già presente in forma implicita nella mente? Prima di porre il problema di sapere se tale trasposizione è utile, ci si deve chiedere se è possibile. Come può il pensatore staccarsi in qualche modo dal suo pensiero, visualizzarlo astrattamente, indipendentemente persino dal contenuto del pensiero? Questo distacco è certamente un passo necessario nel processo del progresso della scienza matematica: ma l'operazione inversa, che è il riassorbimento dell'esplicito nell'implicito, non è meno importante, non meno necessaria. Questa seconda fase, che equivale a trattare come "esistenti", come oggetti legittimi da trattare globalmente, le classi d'equivalenza *ricavate* per astrazione come risultato del precedente processo di renderle esplicite, corrisponde a ciò che i logicisti chiamano "esigenza ontologica" (1) per l'operazione in questione. Ora tutto porta a credere che questa operazione di distacco, questa rottura del campo semantico che sorregge l'attività mentale che vuole astrarre, è possibile, per essere precisi, soltanto se l'oggetto generato da questa operazione è riconosciuto come il portatore di stabilità, di un "significato", forte come quello riconosciuto negli elementi primitivi. Illustriamo questi difficili pensieri con un esempio. Ci sia permesso definire un numero razionale astrattamente come una classe di equivalenza di coppie ordinate di interi:

$$(p, q) \sim (p', q')$$

(1) Vedere, per esempio, Quine, W. Y., *From a logical point of view,* Harvard U. P., Cambridge, Mass., 1964.

se e solo se $pq' = p'q$.

Ma questa definizione avrà significato solo se si dimostra che la classe di equivalenza così definita si comporta come un intero, che ha le stesse proprietà operazionali (e ancora di più, perchè la divisione per un razionale diverso da zero è sempre possibile), e che, inoltre, l'insieme di questi nuovi numeri contiene in modo naturale l'insieme degli interi con cui si è iniziato. Così la qualità di esistenza che si è attribuita all'inizio agli interi si estenderà naturalmente ai razionali che li contengono. Quando si è ben capito che il risultato del processo di astrazione è quello che giustifica l'astrazione e la rende possibile, si vede come la presentazione formale e assiomatica va contro l'ordine naturale. Nel buon insegnamento, si introducono nuovi concetti, nuove idee, ecc. usandole, se ne spiegano le regole di interazione con elementi primitivi che si presumeva esistenti, e si rendono familiari attraverso l'uso di queste regole.

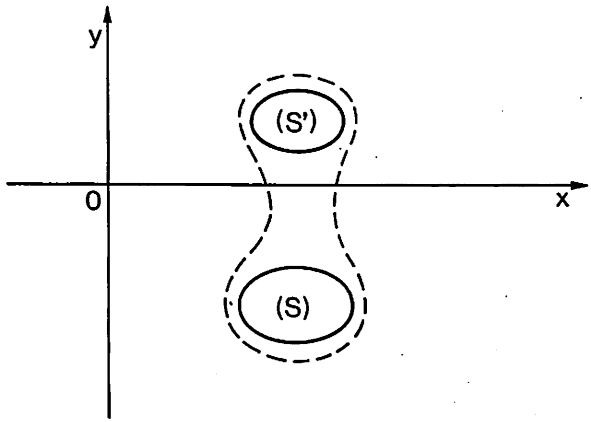
E' solo più tardi che si potrà dare la definizione astratta che ci permette di verificare la consistenza della teoria estesa in questo modo. La Matematica anche nella sua forma più elaborata, non ha mai proceduto diversamente (tranne forse che per certe generalizzazioni gratuite di teorie algebriche). Nella relazione scritta per il Congresso, il Prof. Piaget diede un'ottima definizione del processo di astrazione di strutture conscie da schemi di attività inconscia: e ciò si chiama processo di "astrazione riflettente" (1). Egli esprime, tuttavia, la sua convinzione che l'insegnamento esplicito delle grandi strutture astratte introdotto dalla matematica contemporanea è un fattore molto efficace nella facilitazione di questo processo. Dovrei dire, quindi, che mi sembra che lo psicologo riponga troppa fiducia nelle virtù del formalismo matematico? E che egli attribuisce a un ragionamento deduttivo astratto un potere che difficilmente può avere nella mente infantile?

Vorrei dare un'immagine geometrica di questo processo di "astrazione riflettente": rappresentiamo l'insieme delle attività umane (quelle senso-motorie e mentali) con il piano x, y e supponiamo che il semipiano superiore $y > 0$ rappresenti la parte conscia di queste attività, il semipiano inferiore $y < 0$ la parte inconscia. Uno schema dell'attività inconscia, S, sarà rappresentato

(1) Cfr. pag. 24.

con una forma geometrica (S) in questo semi-piano inferiore. L'astrazione riflessiva consiste nella creazione da (S), derivata da S, di una forma (S') nel semipiano conscio $y > 0$: (S') è una specie di immagine riflessa di (S), generalmente impoverita e purificata.

Questo processo della formazione di un "frutto conscio" S' che parte dalla struttura-madre S è in ogni punto analogo al processo della riproduzione biologica, con cui un essere vivente produce un discendente isomorfo a se stesso.



Se il processo continua, ci sarà sempre alla fine la formazione in S di una gemma, di un feto, che si sviluppa in S e, giunto a maturazione, se ne distacca. Questo è un "concepimento vero e proprio" – come indica il termine – che permette la formazione di S' da S. Il compito dell'insegnante è di portare il feto a maturazione e, quando arriva il momento, di liberarlo dalla struttura-madre inconscia che lo ha generato, un ruolo maieutico, un ruolo da levatrice – come dice Socrate (1). Ma, in questa analogia, le grandi strutture logiche astratte, come, per esempio, la nozione della relazione di equivalenza, potenti e isolati mezzi di astrazione, hanno una forte rassomiglianza con i rozzi strumenti del chirurgo, come il forcipe o il taglio cesareo.

E se si procede a un taglio cesareo per un feto prematuro, si perde il

(1) Cfr. pag. 17.

neonato e si corre il forte rischio di uccidere la madre. Se, d'altra parte, si lasciasse sviluppare il feto, se lo si lasciasse giungere a concepimento fornendogli un ambiente nutritivo adatto, il distacco dalla struttura madre verrebbe naturalmente e senza l'aiuto di quei potenti ma freddi strumenti — — quali le astratte nozioni logiche. I nostri padri (e invero i matematici della mia generazione) non conoscevano la "matematica moderna": il che non ha impedito loro di apprendere la matematica e, non esito a dirlo, in modo molto più naturale di quello della presentazione modernista. Lasciare maturare l'embrione, significa difatti condurlo alla consapevolezza, per dargli così un significato e un'importanza sia operazionale che concettuale. E' questo primordiale compito di conferirgli "esistenza" nel mondo mentale, quello a cui si deve dedicare l'insegnamento.

Il problema vero e proprio di fronte a cui si trova l'insegnamento della matematica non è quello del rigore, ma il problema dello sviluppo del "significato", dell'esistenza "degli oggetti matematici".

Formalizzazione, assiomatica e rigore.

Ciò mi porta a trattare il vecchio cavallo di battaglia dei modernisti (della varietà dell'Europa continentale): rigore e assiomatica. Si sa che qualsiasi speranza di dare alla matematica un fondamento rigorosamente formale fu irreparabilmente distrutta dal teorema di Gödel. Tuttavia non sembra che la matematica ne soffra molto nelle sue attività professionali. Perchè? Perchè, in pratica, il pensiero del matematico non è mai un pensiero formalizzato. Il matematico dà un significato ad ogni proposizione, un significato che gli permette di dimenticare la definizione formale di questa proposizione entro una qualsiasi teoria formalizzata esistente (il significato conferisce alla proposizione uno "status" ontologico indipendente da ogni formalizzazione). Si può affermare, credo, in tutta sincerità, che gli unici processi formali in matematica sono quelli del computo numerico e algebrico. Ora si può ridurre la matematica al calcolo? Certamente no, perchè anche in una situazione che è interamente relativa al calcolo, le fasi stesse del calcolo si devono scegliere fra un grandissimo numero di possibilità. E la propria scelta è guidata solo dall'interpretazione intuitiva delle quantità in questione. Così l'enfasi posta dai modernisti sull'assiomatica non è solo un'aberrazione pedagogica (che è abbastanza ovvia), ma anche un'aberrazione matematica vera e propria.

Non si è ricavata, credo, dall'assiomatica di Hilbert la vera lezione in essa contenuta: si accede al rigore assoluto solo eliminando il significato; il rigore assoluto è possibile soltanto e per mezzo di tale abbandono di significato. Ma se si deve scegliere fra rigore e significato, scelgo questo ultimo senza esitare. E' questa la scelta che si è sempre fatta in matematica, dove si lavora quasi sempre in una situazione di semi-formalizzazione, con un metalinguaggio che è un modo di parlare comune, non formalizzato. E l'intera professione è soddisfatta di questa situazione bastarda e non chiede di meglio.

Inoltre è stata, molto probabilmente, sopravvalutata l'importanza del rigore in matematica. Di tutte le discipline scientifiche, la matematica è una materia in cui il rigore è "a priori" il meno necessario.

Quando un matematico X pubblica la dimostrazione di un teorema, il lettore Y si trova in posizione tale da poter controllare la sua affermazione. Egli può dire: la prova mi sembra corretta e ne sono convinto; oppure: non capisco questo e quest'altro punto, questo lemma non mi è molto chiaro, c'è un vuoto nella discussione. D'altra parte nelle discipline sperimentali la situazione è del tutto diversa. Quando uno sperimentatore A presenta il risultato delle esperienze eseguite nel suo laboratorio, può dare tutti i dettagli che vuole circa il procedimento seguito, tutti i dati desiderati, avallati dai risultati numerici, ma io non ho modo di controllare l'esattezza delle sue affermazioni e devo solo credergli. Di conseguenza l'errore è in definitiva un fenomeno trascurabile nell'evoluzione della matematica.

Nell'evoluzione di una teoria capita più spesso che sia un caso fortunato a deviare la scienza dal suo corso normale. L'errore dà fastidio solo per chi l'ha fatto, non per la matematica in sè. I sostenitori dell'assiomatica farebbero bene a riflettere sul seguente problema filosofico: perchè il linguaggio comune non è assiomatizzabile? (Forse gli approcci più vicini a un linguaggio formale sono quelli della legge e della teologia). E' che, nelle situazioni di ogni giorno, i membri della stessa comunità linguistica hanno praticamente lo stesso universo semantico, la stessa visione dell'universo attraverso il loro linguaggio. Anche se un nome — un concetto — si realizza in estensione (1) da una classe di equivalenza che non è formalizzabile, tuttavia il discorso giornaliero opera con notevole efficacia e una quasi totale assenza di ambiguità. (Se una frase fosse ambigua, allora l'ambiguità è generalmente risolta dal contesto). Il significato nel linguaggio comune si basa principalmente su criteri di carattere topologico: l'identità di un oggetto, o di un individuo, si esprime nel carattere connesso della sfera spazio-temporale occupata da quell'oggetto (o da quell'individuo).

E la sintassi del linguaggio ordinario, relativamente povera dal punto di vista strutturale, descrive le interazioni dinamiche più frequenti fra gli oggetti spazio-temporali.

D'altra parte in matematica, tra i matematici professionisti (e "a fortiori" tra gli studenti) gli universi semantici sono molto diversi: un'espressione che ha senso per X è incomprensibile per Y, e così via. E questo perchè il "significato" in matematica è il frutto di un'attività costruttiva, di un apprendistato, e non ci sono mai stati due matematici (o anche due studenti) che hanno avuto la stessa storia di esperienze matematiche. E' questa diversità fondamentale delle sfere semantiche che spiega il bisogno della formalizzazione — almeno in parte — nella matematica.

Nel migliore dei casi i matematici basano la loro sfera su un tipo di tronco comune fatto di oggetti e di teorie che si trovano nell'insegnamento "standard" (per esempio i numeri reali e complessi, le funzioni analitiche e differenziabili, molteplicità, gruppi, spazi vettoriali, . . .) e ogni dimostrazione, salvo la più specializzata, deve partire da questo vernacolo matematico comune a tutti. La prova di un teorema (*T*) è come un sentiero che, partendo da proposizioni derivate dal tronco comune (e quindi comprensibili a tutti), conduce per fasi successive ad una situazione psicologica di fatto in cui (*T*) appare ovvio. Il rigore della prova — in senso ordinario, non formalizzato — dipende dal fatto che ciascuna di queste fasi è perfettamente chiara ad ogni lettore, considerando le estensioni del significato già effettuate nelle fasi precedenti. Se si rifiuta una dimostrazione in matematica, è spesso perchè incomprensibile piuttosto che falsa. Di solito questo capita

(1) Per la definizione di questo termine tecnico, vedere, per esempio, Quine, From a logical point of view, pag. 21.

perchè l'autore, accecato in qualche modo dalla visione della sua scoperta, ha fatto delle ipotesi indebitamente ottimistiche sugli antefatti comuni. Subito dopo i suoi colleghi renderanno esplicito ciò che l'autore ha espresso implicitamente e, riempiendone i vuoti, completeranno la dimostrazione Il rigore, come i rifornimenti e i rincalzi per le truppe, "viene sempre dopo" una sconfitta.

Di fatto, che lo si voglia o no, tutta le pedagogia matematica, anche se con scarsa coerenza, si fonda su una filosofia della matematica. La tendenza modernista si è fondata essenzialmente sulla concezione formalistica della matematica – quella che è stata esposta in modo classico nel famoso aforisma di Bertrand Russell, "La matematica si può definire come l'argomento in cui non si sa mai di cosa si parla e neppure se ciò che si dice è vero". I suoi oppositori, d'altro canto, insistono nell'ancorare la matematica alla realtà. Li si accusa con piacere di platonismo. Ma ci sono senza dubbio sfumature che li distinguono. Per Platone il mondo delle Idee costituiva la Realtà Suprema, e il mondo concreto delle nostre percezioni era solo un tipo di immagine degradata di questo mondo ideale. Ma l'uomo ha sempre l'ingenua illusione di aver accesso alla realtà suprema; più umilmente ci si deve chiedere se la matematica non abbia avuto un ruolo nel distacco evolutivo dell'uomo, se non abbia costituito un fattore decisivo nella superiorità dell'uomo sull'animale.

Nella realtà esterna, certi processi locali, di natura biologica o fisica, sono soggetti a un determinismo molto rigido; altri, invece, sono aleatori, cioè non si possono prevedere con precisione. Molto rapidamente, il sistema nervoso animale, quindi l'umano, si è specializzato nella simulazione di processi esterni ben determinati; è inutile, infatti, simulare i processi aleatòri, dal momento che questi, per definizione, hanno un esito imprevedibile. Molto in fretta, la mente ha isolato un certo numero di situazioni tipicamente dinamiche con esito prevedibile, perchè soggette a un determinismo rigoroso (dinamicamente stabile).

Questi modelli di conflitto, organizzati in una classificazione di processi efficaci, sono stati le prime situazioni "comprese" dall'uomo (come, per esempio, la cattura di una preda da parte di un cacciatore); questi hanno formato i "nuclei di intelligibilità della realtà" per dirlo con le parole di J. Ladriére [2]. Ma dopo aver assimilato una formula operante, la mente ha la tendenza ad estrapolare le condizioni di applicazione di questa formula e di ripeterne l'uso (come il cane di Pavlov che salivava al suono di un campanello).

Da qui viene la tendenza a isolare i processi ripetibili, che così si possono combinare tra loro quante volte lo si desideri. Questa è la sorgente della matematica: è la scienza della simulazione degli automatismi. A tale scopo, cioè per essere in grado di ripetere e combinare una configurazione di oggetti, la mente è portata a semplificare, a purificare la realtà. Tra il formale e l'intelligibile c'è in linea di principio la stessa relazione che esiste tra una funzione derivata e la funzione primitiva.

Nel processo del germe di una funzione, si omette una buona parte dell'informazione contenuta nel germe onde permettere un'estrapolazione più facile.

Allo stesso modo, nella percezione di una situazione intelligibile la mente schematizza, semplifica, così può ripetere e combinare tale situazione. Quindi, procedendo da tale nucleo di intelligibilità, la mente matematica genera per combinazione tutta una struttura astratta che tende ad ampliare le condizioni di applicabilità della formula che ne risulta e ad estenderne la sfera di validità. Ma tra la realtà e questo costrutto matematico c'è la stessa relazione esistente tra il piano tangente e un punto della varietà immersa che esso tocca; non appena ci si scosta un po' dal punto di contatto, la validità del modello astratto diminuisce e sparisce, in generale, perchè questo "piano tangente" devia dalla realtà. Dobbiamo ammettere che può accadere, anche se piuttosto eccezionalmente, che la teoria matematica è del tutto valida empiricamente. E' che, come dice Dostoyevsky, "la realtà spesso manca di senso dell'humor".

Certi aspetti della realtà naturale – il campo della filosofia naturale classica – sono completamente governate da regole di carattere automatico. Da qui l'esistenza di leggi quantitative, fisiche – e la loro "irragionevole" precisione, secondo la tanto precisa definizione di E. Wigner. E solo nei limiti in cui la natura è stupida, essa si lascia porre in termini matematici...

Questa concezione della matematica va chiaramente contro il punto di vista tradizionale. Fa della continuità geometrica un fattore di primaria importanza. Uno schema algebrico discreto deriva la sua efficacia formale, solo perchè ha una realizzazione empirica nel continuo spazio-tempo. La pedagogia deve sforzarsi di ricreare (secondo la legge della ricapitolazione di Haeckel (1) per cui l'ontogenesi ricapitola la filogenesi) le esperienze fondamentali che, fin dagli albori della storia, hanno dato origine a entità matematiche. Ciò non è certo facile, perchè si devono dimenticare tutte le elaborazioni culturali (fra cui l'assiomatica è l'ultima) che si sono sedimentate su questi oggetti matematici al fine di ristabilire la loro freschezza originaria. Si deve dimenticare la cultura per ritornare alla natura. La tendenza modernista rappresenta, invece, un incremento di cultura a danno della natura; è – nel senso stretto del termine – un preziosismo. Ma se il preziosismo nell'arte e in letteratura ha talvolta un certo fascino, lo stesso può non essere vero in matematica ...

Queste considerazioni – per quanto sembrino azzardate – hanno la loro importanza quando si viene a discutere un punto cruciale nella riforma modernista: il posto della geometria elementare nell'insegnamento.

Confronti fra il linguaggio ordinario, quello geometrico e quello algebrico.

E' interessante confrontare il linguaggio ordinario con quelli della geometria euclidea e dell'algebra formale secondo questi tre punti di vista.

(1) Il "significato" di un elemento: si può formalizzare la classe di equivalenza (in estensione) definita da un elemento del linguaggio?

(2) Questo significato è intuitivamente chiaro?

(3) La ricchezza (o la povertà) della sintassi.

Si hanno quindi le seguenti risposte.

(1) Vedere per esempio, Storer, T. I., et al, General Zoology, (V° ed.), Mc Graw-Hill, New York, 1972.

Linguaggio ordinario.

(1) La classe di equivalenza definita da una parola (un concetto) non si può ordinariamente formalizzare (è spesso di natura topologica – l'invarianza di una *Gestalt).*

(2) Ciononostante il significato della parola è chiaro.

(3) La sintassi è povera. (Ci sono pochi tipi di frasi nucleari in grammatica, e la sistemazione delle frasi, l'una in seno all'altra come subordinate, cessa rapidamente: tutt'al più ci sono tre o quattro stadi possibili di subordinazione).

Geometria euclidea.

(1) L'oggetto definito da una parola, una figura geometrica, è formalizzabile (cioè suscettibile di descrizione, in poche parole, come funzione degli "enti" elementari, ossia i punti).

L'equivalenza è definita dal gruppo euclideo, un gruppo di dimensione finita.

(2) Il significato di una parola è chiaro, perchè coincide con l'intuizione spaziale della figura corrispondente.

(3) La sintassi è ricca, perchè descrive tutte le rispettive posizioni spaziali delle figure e i loro spostamenti. (Tuttavia è espressa verbalmente da un ristretto numero di concetti, come l'incidenza, le cui combinazioni sono illimitate).

Linguaggio formale o algebrico.

(1) La classe di equivalenza è definita dall'identificazione di un simbolo scritto con se stesso: quindi è formalizzabile.

(2) Il "significato" di un simbolo algebrico si istituisce con difficoltà o è inesistente.

(3) La sintassi, che è il modo in cui si possono combinare possibili operazioni, è ricca perchè in fondo è illimitata.

Si vede da questo confronto come la geometria euclidea sia una fase intermedia naturale (e forse insostituibile) fra il linguaggio ordinario e quello algebrico. La geometria permette un ampliamento psicologico della sintassi, in quanto conserva ancora il significato, offerto sempre dall'intuizione spaziale. Nello stesso tempo il significato di un elemento può già essere dato da una definizione formale. La decisione dogmatica "modernista" di eliminare la geometria elementare per far spazio all'analisi e all'algebra lineare, offre ben poco per poter essere sostenuta psicologicamente, perchè gli oggetti algebrici (i simboli) sono troppo poveri semanticamente per farsi capire direttamente come nel caso di una figura spaziale.

Aggiungerò che il linguaggio della geometria elementare offre una soluzione al seguente problema: esprimere in una combinazione unidimensionale – quella del linguaggio – una morfologia, una struttura multidimensionale. Ora questo problema ricorre in matematica in una forma "ovunque densa", quando il matematico deve comunicare agli altri le sue intuizioni.

In questo senso, lo spirito della geometria circola quasi ovunque nell'immenso corpo della matematica, ed è un grave errore pedagogico cercare di eliminarlo. A questa argomentazione si può aggiungere la povertà euristica dell'algebra, dove ogni nuova difficoltà si presenta come un muro che richiede metodi del tutto nuovi se lo si vuol superare. Non c'è niente di tutto ciò in geometria, dove la combinazione delle figure permette un gran numero di esercizi che sono ben graduati secondo le difficoltà.

L'elemento di equilibrio.

Se sono stato duro con i modernisti, non significa affatto che tutto quello che è stato raggiunto con il contributo di questo movimento debba essere messo da parte; è certo impossibile un ritorno allo "status quo". In particolare c'è un punto positivo che si dovrebbe conservare in ogni caso. In passato esisteva, tra l'insegnamento secondario e quello superiore della matematica, un tipo di abisso che i giovani studenti, che lasciavano la scuola secondaria, avevano grosse difficoltà a colmare.

Con l'introduzione della notazione insiemistica (presentata senza alcuna teoria, come insieme di semplici abbreviazioni) e i primi rudimenti dell'algebra lineare, si può concorrere a colmare questo vuoto. Secondo me, un alunno che lascia la scuola secondaria (16 - 17 anni) e intende intraprendere una carriera scientifica, dovrebbe trovarsi circa allo stesso livello matematico di un Leibniz con, in più, alcune nozioni dell'algebra lineare moderna. Sembra possibile raggiungere questo obiettivo senza sacrificare l'insegnamento della geometria elementare. Così facendo non è necessario tentare di ottenere un rigore impossibile; si manterrà la sostanza degli "elementi di Euclide" (in una presentazione più flessibile e meno assiomatica) abbandonando il tipico procedimento dimostrativo che, in ogni caso, è da tanto tempo anacronistico.

Forse questa conclusione moderata sarà deludente. Ma la comunità matematica in questi ultimi anni si è lasciata condurre fuori strada da dichiarazioni e promesse sconsiderate.

Si è parlato di una "rivoluzione in matematica" e si è asserito che, grazie a nuovi programmi e a nuovi metodi, il più comune degli alunni sarebbe in grado di completare i suoi studi secondari in matematica. E' ora di mettere fine a queste dicerie che confinano con l'inganno. Non è possibile alcun miracolo e si può solo sperare di migliorare la situazione presente in modo graduale e con piccoli miglioramenti locali. Allora chi è stato il responsabile di questo movimento modernista? Non si è spiegato tutto, fortunatamente, quando si è attirata l'attenzione sugli interessi commerciali conseguenti le alterazioni dei curricola e dei libri di testo. Oserei suggerire la seguente ipotesi con certe ovvie riserve: senza dubbio c'era un senso di relativa frustrazione nella comunità matematica negli anni 1950 - 60: gelosia nei confronti dei fisici, favoriti finanziariamente dallo sviluppo dell'energia nucleare (e dagli strumenti); gelosia nei confronti dei biologi, resi famosi dalla scoperta del DNA e del codice genetico. In quegli anni la matematica stava facendo notevoli progressi, specie nella geometria algebrica e nella topologia algebrica, ma questi progressi non suscitavano l'interesse del pubblico.

Il lancio dei satelliti (1957 - 60) attirò di nuovo l'attenzione del pubblico sulle tecniche matematiche (e specialmente sul computer). Fu per ridestare questo interesse in declino che si ricorse alla "matematica moderna".

Se questa ipotesi ha l'alone della verità, sarebbe bene ricordare ai nostri colleghi che c'è una legge della nostra società secondo la quale le cose importanti in essa non sono mai quelle di cui si parla; nella nostra era, ancor più che al tempo di Nietzsche, le nuove idee arrivano in punta di piedi (*).

Riferimenti.

[1] Thom, R., *Les Mathématiques "Modernes"; une erreur pédagogique et philosophique?* L'age de la Science, 3, 1970, 225 - 36 (Tradotto in Inglese: *Modern Mathematics: an educational and philosophical error?* The American Scientist, 59, 6, 1971, 595 - 9).

[2] Ladriére, J., *Objectivité et réalité en mathématiques,* Revue philosophique dei Louvain, 64, 1966, 550 - 81.

I.H.E.S.
91 Bures-sur-Yvette,
France

(*) Dal volume "Developments in Mathematical Education" (Atti del II Congresso ICMI (1972)), pag. 194. A cura di A. G. Howson. Cambridge University Press - 1973.

Gli articoli tratti dagli Atti del I Convegno ICMI (Lione) sono stati tradotti dalla rivista *Educational Studies in Mathematics*, vol. 2, nn. 2, 3, per gentile concessione della D. Reidel Publishing Company, Dordrecht (Olanda).

Gli articoli tratti dagli Atti del II Convegno ICMI (Exeter) sono stati tradotti dal volume Howson (ed.): *Developments in Mathematical Education*, Cambridge University Press (1973).

Gli articoli tratti dagli Atti del III Convegno ICMI (Karlsruhe) sono stati tradotti dal volume H. Athen - H. Kunle (ed.): *Proceedings of the Third International Congress on Mathematical Education* (1977) o dagli originali forniti direttamente dagli Autori.

Stampa: Officine Grafiche Pitagora-Tecnoprint,
Via Barelli 4H, Bologna

Pitagora Editrice, Via Zamboni 57, Bologna