Paolo Freguglia

Dipartimento di Matematica Pura e Applicata, Università di L’Aquila

Cos’è un numero? Giuseppe Peano, i fondamenti e l’insegnamento della matematica.

- Nell’Antichità: *numeri razionali*
- Scuola Pitagorica VI sec a.C.: scoperta dell’*irrazionalità* o *incommensurabilità*
- Algebristi del Cinquecento (d.C.): scoperta dei *numeri complessi*
- XIX sec. Numeri *ipercomplessi* (*quaternioni*, ecc. W.R.Hamilton) e *numeri di H.Grassmann*
- XX sec. *Numeri iperreali* (analisi non standard)

- Ricerche sui fondamenti
- - Situazione scientifico culturale tra Ottocento e Novecento
- - Tra matematica e filosofia
- - Il *rigore* come obiettivo epistemologico scientifico
- Varie scuole: logicisti, intuizionisti, formalisti, ecc.

- NUMERI INTERI

- Approccio cardinale
- Gottlob Frege (1848 – 1925)
- *Grundgesetze der Arithmetik* (*I fondamenti dell'aritmetica*) (1884)
- <u>Programma logicista</u>: fondare l'aritmetica sulla logica

$x \in$ F sta per "x cade sotto il concetto F"

- (insieme come estensione di un concetto)
- F è ***equinumeroso*** a G sse F e G possono essere messi in *corrispondenza biunivoca*. La c.b. è una relazione di equivalenza. Una relazione di equivalenza definisce per astrazione un ente matematico (ad es. se prendiamo la relazione di parallelismo tra rette individuiamo le *direzioni*, come concetto astratto)
- Allora per Frege il ***numero cardinale*** di un insieme (classe) α è l' insieme di tutti gli insiemi equinumerosi ad α.
- Questa definizione vale nel caso finito come pure nel caso transfinito (vedi George Cantor (1878, 1895, "teoria ingenua" degli insiemi)

- Crisi del programma logicista
- **Antinomia di Bertrand Russell (1901)**
- Proprietà: “non essere elemento di se stesso”
- R: “classe di tutte e sole quelle classi che non contengono se stesse come elemento”. La domanda è: R appartiene a se stessa?
- Posso definire:
- $X \in R \leftrightarrow X \notin X$
- Ponendo nella precedente X = R si ottiene la contraddizione:
- $R \in R \leftrightarrow R \notin R$
- Cioè se R appartiene a R allora R non appartiene ad R e viceversa. Quindi non posso decidere.
- Teoria assiomatica degli insiemi (es. Zermelo-Fraenkel)

- Giuseppe Peano (Cuneo 1858 – Torino 1932)
- Programma neo-euclideo: nozioni e concetti fondamentali autonomi dalla logica, ma cruciale utilizzo della logica simbolica per la trattazione.
- L'obiettivo di Peano è di stabilire il più piccolo possibile insieme di concetti geometrici primitivi, cioè non riconducibili ad altri concetti (da cui definire altri concetti) e il più piccolo insieme possibile di assiomi da cui poter dedurre altre proposizioni.

- Approccio ordinale
- Giuseppe Peano
- *Arithmetices principia, nova methodo exposita* (1889)
- Spiegazioni:
- Il segno N significa *numero* (*intero positivo*)
- Il segno 1 significa *unità*
- Il segno $a + 1$ significa il successivo di a
- Il segno = significa "…è uguale a…" (o anche "se e solo se"
- Il segno $\supset$ sta per "…contiene…" oppure "…implica…"
- Tipograficamente Peano utilizza il simbolo ε che noi oggi rendiamo con $\in$.

- Assiomi di Peano
- 1. $1 \in N$
- 2. $a \in N . \supset . a = a$
- 3. $a, b \in N . \supset : a = b . = . b = a$
- 4. $a, b, c \in N . \supset : a = b . b = c : \supset . a = c$
- 5. $a = b . b \in N : \supset . a \in N$
- 6. $a \in N . \supset . a + 1 \in N$
- 7. $a, b \in N . \supset : a = b . = . a + 1 = b + 1$
- 8. $a \in N . \supset . a + 1$ - = [cioè $\neq$] 1
- 9. (*Principio di induzione matematica*): Se k è una classe e l'unità 1 appartiene a k, e per ogni x, se x è un numero e appartiene a k, e allora il successivo di x appartiene a k, allora la classe k è contenuta in N.

- Nel **Formulario mathematico** (1928) l'*Arithmetica* è così presentata:
- A. 0. $N_0 \in$ Cls (N_0 è una classe)
- A. 1. $0 \in N_0$
- A. 2. $a \in N_0 \,.\!\supset a+ \in N_0$
- A. 3. Principio di induzione: se *s* è (una classe) una proprietà che è soddisfatta da 0; *a* soddisfi *s* per ogni valore, se *a* soddisfa *s* allora anche *a*+ la soddisfa, allora ogni numero *a* soddisfa *s*.
- A. 4. $a, b \in N_0 \,.\, a+ = b+ .\!\supset\!.\ a = b$
- A. 5. $a \in N_0 \,.\!\supset\!. a+ - = 0$

- Definitione de additione (dal *Formulario*)
- D.1. $a \in N_0 .\supset. a + 0 = a$
- D.2. $a, b \in N_0 . \supset. a + (b+) = (a + b)+$
- D.3. $a \in N_0 . \supset. a + 1 = a+$
- “ $a + 2 = (a+)+$
- ……

- **Th**: $a, b \in N_0 . \supset . a + b \in N_0$
- *Dim.*:
- (1) $a \in N_0$
- (2) $a + 0 \in N_0$ D. 1
- (3) $a, b \in N_0 . \supset . a + (b+) = a + (b + 1) =$
- $= (a + b) + 1$ D. 2 , A.1, A. 2
- (4) $(a + b) + 1 \in N_0 . \supset a + (a + 1) \in N_0$ da (3)
- (5) $(a + b) \in N_0$. Induz (1) e (4)
- Cioè, se $(a + b)$ fosse un numero $(a + b) + 1$ è un numero implica che $a + (b + 1)$ sia un numero (come vorrebbe la definizione di somma).
- Dunque $(a + b)$ è un numero.

- Th. $a, b, c \in \mathrm{N}_0 .\supset. (a+b)+c = a+(b+c)$
- $Dim.:$
- (1) $a, b \in \mathrm{N}_0 .\supset. (a+b)+0 = a+b$ D. 1
- e $a+(b+0) = a+b .\supset. (a+b)+0 =$
- $= a+(b+0)$
- (2) $[(a+b)+c]+1 = [a+(b+c)]+1$
- e $(a+b)+(c+1) = a+[(b+c)+1] =$
- $= a+[b+(c+1)]$
- (3) Induz (1) e (2)

- Richard Dedekind (1831 - 1916)
- *Che cosa sono e a che servono i numeri*?
- (*Was sind und was sollen die Zahlen*?) 1888
- **Definizione** di *rappresentazione simile*:
- Una rappresentazione φ di un sistema S si dice simile quando a termini diversi *a*, *b* del sistema S corrispondono sempre immagini diverse *a'*= φ(*a*) e *b*'= φ(*b*) . Se T è una parte qualsiasi di S, allora la rappresentazione φ di S contiene al tempo stesso una rappresentazione determinata di T che chiameremo immagine di T e indicheremo con T'.

- Condizioni di Dedekind
- Definizione di *catena*
- Chiameremo K una *catena* se K'$\subseteq$ K
- Se A $\subset$ S, con A_0 indichiamo l'intersezione di tutte le catene che contengono A.
- Un sistema N si dice *semplicemente infinito* se esiste una rappresentazione simile φ di N in se stesso tale che N risulti la catena di un elemento non contenuto in φ(N). Chiameremo questo elemento, *elemento fondamentale* di N e lo indicheremo con il simbolo 1. Diremo anche che il sistema semplicemente infinito N è *ordinato* dalla rappresentazione φ.

- In altre parole scriveremo le condizioni:
- a) $N' \subset N$
- b) $N = 1$
- c) $1 \not\subset N'$
- d) La rappresentazione φ è simile

- Dedekind si sofferma poi sul principio di *induzione completa*

- **Fondamenti assiomatici della Geometria**
- I lavori di Peano che riguardano questo settore sono coevi a quelli sull'aritmetica:
- *I principi di geometria logicamente esposti* (Frat.lli Bocca, Torino,1889)
- «Sui fondamenti della geometria» (*Rivista di Matematica* IV (1894)). Storicamente questi lavori si collocano fra le *Vorlesungen über neuere Geometrie* (1882) di Pasch e *Grundlagen der Geometrie* (1899) di Hilbert. Il principale ed esplicito scopo di Peano in particolare nel primo dei lavori consiste nel proporre teoremi e proposizioni fondamentali della **geometria di posizione**, cioè proposizioni intorno all'**ordine** ed all'**appartenenza**

- Peano propone come concetti primitivi per la geometria “punto” e “segmento”, anche se il secondo concetto è espresso mediante la relazione ternaria $c \in ab$, *che significa* “*c* sta fra (i punti) *a* e *b*”.

- L'insieme di tutti i punti è denotato con **1**. Se a e b sono punti, possiamo definire i seguenti due insiemi di punti che vengono chiamati *raggi*:
- $a'b =: \mathbf{1} \,.\, [x\ \varepsilon]\ (b\ \varepsilon\ ax)$
- $ab' =: \mathbf{1} \,.\, [x\ \varepsilon]\ (a\ \varepsilon\ xb)$

Cioè $a'b$ è l'insieme di punti x tali che b è interno al segmento ax, mentre ab' è l'insieme di punti x tali che a è dentro il segmento xb .

- Gli assiomi introdotti da Peano sono ottenuti dalle *Vorlesungen* di Pasch, anche se presentano in confronto aggiunte e modifiche interessanti.
- *Assiomi preliminari di Peano sui segmenti*:

0.1. $a, b \,\varepsilon\, \mathbf{1} \;.\supset.\; ab \,\varepsilon\, \mathrm{K1}$

cioè, se *a* e *b* sono punti, allora il segmento *ab* è un insieme di punti.

⇒ Inoltre «[…] Il simbolo = fra due punti denota la loro identità», quindi:

0.2. $a,b,c,d \,\varepsilon\, \mathbf{1} \;.\; a = b \;.\; c = d \;:\supset.\; ac = bd$

cioè, se *a*, *b*, *c*, *d*, sono punti e *a* coincide con *b* e *c* con *d*, allora il segmento *ac* è uguale al segmento *bd*.

- Assomi di Peano per la geometria di posizione sulla **retta.**

1. $\mathbf{1} - = \Lambda$, that is $\mathbf{1} \neq \emptyset$
2. $a\ \varepsilon\ \mathbf{1} . \supset .\because . x\ \varepsilon\ \mathbf{1} .\ x - = a : - =_x \Lambda$
3. $a\ \varepsilon\ \mathbf{1} . \supset : aa = \Lambda$
4. $a, b\ \varepsilon\ \mathbf{1} .\ a - = b : \supset .\ ab - = \Lambda$
5. $a, b\ \varepsilon\ \mathbf{1} . \supset .\ ab = ba$
6. $a, b\ \varepsilon\ \mathbf{1} . \supset .\ a - \varepsilon\ ab$
7. $a, b\ \varepsilon\ \mathbf{1} .\ a - = b : \supset .\ a'b - = \Lambda$
8. $a, b, c, d\ \varepsilon\ \mathbf{1} .\ c\ \varepsilon\ ad\ .\ b\ \varepsilon\ ac : \supset .\ b\ \varepsilon\ ad$

- (segue assiomi di Peano per la retta)

9\. $a, d \,\varepsilon\, \mathbf{1}.\ b, c \,\varepsilon\, ad : \supset : b = c . \cup . b \,\varepsilon\, ac . \cup . b \,\varepsilon\, cd$

10\. $a, b \,\varepsilon\, \mathbf{1}.\ c, d \,\varepsilon\, a'b : \supset : c = d . \cup . d \,\varepsilon\, bc . \cup . c \,\varepsilon\, bd$

11\. $a, b, c, d \,\varepsilon\, \mathbf{1}.\ b \,\varepsilon\, ac\ .\ c \,\varepsilon\, bd : \supset . c \,\varepsilon\, ad$

- Peano da di seguito gli assiomi per
- - La geometria di posizione nel **piano**
- e
- - La geometria di posizione nello **spazio 3D**
- Peano arriva a dimostrare il teorema di Desargues per i triangoli omologici nel caso spaziale.

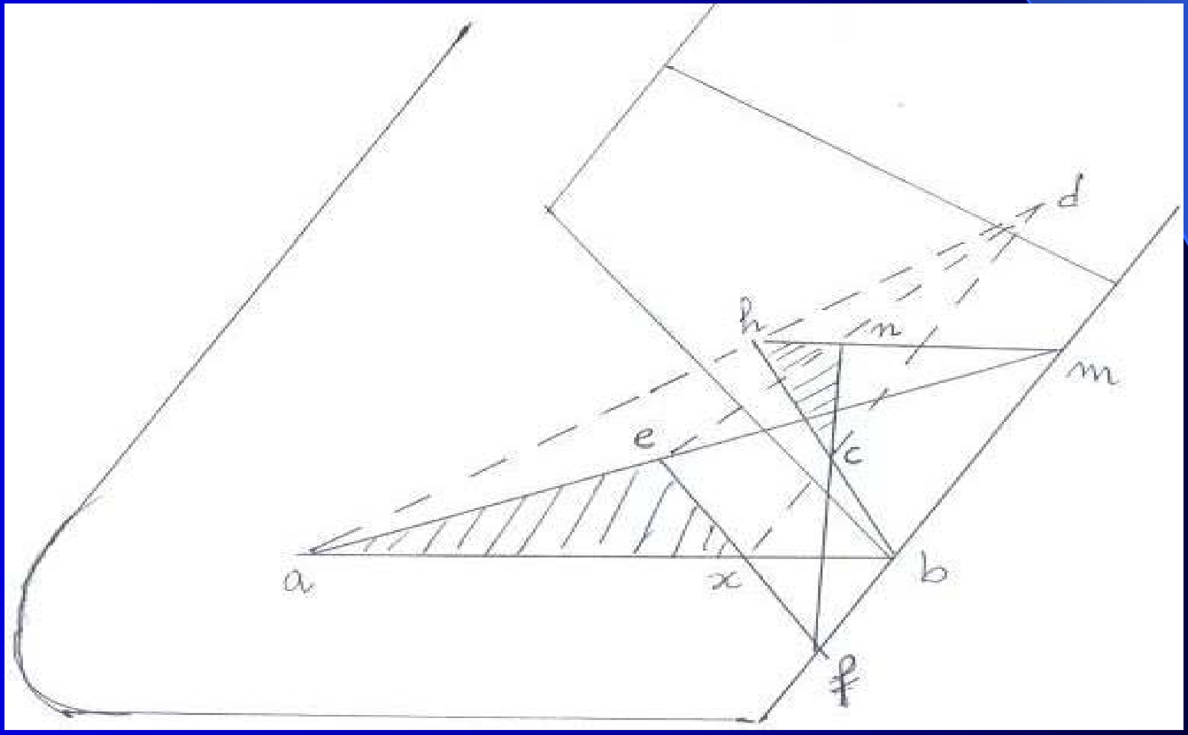
- **Teorema di Desargues per I triangoli omologici per il caso dello spazio 3D:**

Se fra dieci punti *e*, *a*, *b*, *c*, *d*, *h*, *m*, *n*, *f*, *x* i primi quattro non sono complanari e sussistono nove delle esguenti dieci relazioni::

h ε *ad*, *h* ε *bc*, *e* ε *am*, *n* ε *ed*, *n* ε *nh*, *f* ε *mb*,

n ε *cf*, *a* ε *xb*, *c* ε *xd*, *e* ε *xf*

allora sarà verificata anche la restante



- Peano in “Sui fondamenti della geometria” (1894) riprende la stessa assiomatica di *I principi di geometria logicamente esposti* (1889). Ma inoltre presenta gli assiomi per gli spostamenti (moto) in geometria (cioè congruenze, ecc.). Riprende anche in questo caso dalle *Vorlesungen* (1882) di Pasch (assiomi sulla congruenza). Per Peano il movimento in geometria è esprimibile mediante trasformazioni affini

- Problematica applicazione delle ricerche sui fondamenti di Peano e della sua scuola alla didattica e quindi all’insegnamento della matematica. Si veda come esempio il volume di Peano (scritto utopisticamente per la scuola media superiore)
- *Aritmetica generale e algebra elementare*, Paravia, Torino, 1902

- CONCLUSIONI
- Primato fondazionale dell'aritmetica: "conversione di Pasch", ma perchè ad es. un punto debba coincidere con una *n*-pla di numeri?
- Varie possibilità sulla scelta di nozioni primitive, e relativa assiomatica, per la geometria: relativismo fondazionale
- Ricerche sui fondamenti e didattica: influenze reciproche, ma distinzione netta sul piano degli obiettivi epistemologici e scientifici.