LE IMMAGINI DELLA MATEMATICA COME STRUMENTO PER L'INTERPRETAZIONE DELLA REALTA'

Giorgio ISRAEL
Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
P.le A. Moro, 5
00185 - ROMA

In che modo dobbiamo insegnare e divulgare la matematica nella sua funzione di strumento di descrizione, di analisi e di previsione dei processi reali? Non appena ci poniamo questa domanda, essa ci conduce al problema dell'*immagine* che noi abbiamo - e che dobbiamo trasmettere - della matematica. E questo problema è tanto più importante ed ineludibile se la nostra domanda non è posta in termini astratti, ma fa riferimento ad una realtà concreta e specifica, quella della scuola italiana e, più in generale, dell'ambiente culturale italiano. La prima osservazione che, a mio avviso, si impone su questo tema è che l'immagine comune e diffusa della matematica è tuttora inadeguata alla divulgazione e all'insegnamento delle funzioni applicative della matematica di cui si diceva all'inizio.

Ciò è dovuto al fatto che sono stati trascurati alcuni temi cruciali dei quali menzionerò soltanto alcuni, su cui vorrei soffermarmi nel seguito. In primo luogo, è stata sottovalutata l'esigenza di superare ogni punto di vista tendente ad affermare che la matematica è essenzialmente distinta e separata da tutte le scienze empiriche. In secondo luogo, va approfondito il tema del ruolo della fisica nella determinazione del quadro dei modelli, dei metodi ed anche delle tecniche matematiche usate nella descrizione dei processi reali. In terzo luogo, occorre evidenziare i limiti e le difficoltà che il predominio del modello fisico comporta nella modellizzazione matematica delle scienze non fisiche. Un discorso a parte compete infine alla discussione del ruolo, dei vantaggi e dei limiti del calcolo numerico nella formulazione e nella verifica delle leggi matematiche dei processi reali (e quindi del ruolo, dei vantaggi e dei limiti dei *computer* , dell'informatica, con tutta la cascata di problemi attualissimi che ne derivano).

E' davvero strano che in un paese che ha avuto una tradizione matematica come quella italiana, si possa parlare di difficoltà nella definizione e nella trasmissione di un'immagine della matematica adeguata alla sua funzione nelle scienze applicate. Non si è manifestato proprio in Italia un legame strettissimo fra analisi matematica e fisica-matematica, tanto da rendere difficilmente concepibile (in particolare nell'opera di grandi scienziati italiani come Betti, Volterra, Levi-Civita) uno sviluppo della prima che non si accompagnasse ad uno sviluppo della seconda? Ed è ancora in Italia che abbiamo avuto l'insegnamento di uno scienziato come Enriques, così attento ai problemi dell'insegnamento e della divulgazione delle scienze ed in particolare della matematica e così attento ai problemi dei rapporti fra la matematica e tutte le scienze applicate (e non soltanto la fisica). Ed ancora, fu proprio un geometra 'puro' come Guido Castelnuovo a favorire lo sviluppo dell'interesse per il calcolo delle probabilità e le sue applicazioni, in particolare alle scienze attuariali. Infine, un grande scienziato e matematico italiano, Bruno de Finetti, non mancava di manifestare la sua ostilità per ogni approccio astratto e formale nella matematica, polemizzando contro l'obbligo di subire un siffatto approccio «*obtorto collo* , per il solo fatto di non riuscire a scoprire una svista in una catena più o meno insipida ed inintelleggibile di sillogismi».

Ma è stato forse proprio il predominio incontrastato di punti di vista empiristici, più inclini ad un approccio intuitivo e geometrico o addirittura psicologistico (come nel caso di Enriques) che non ad un approccio logico ed analitico, ad aver generato fin dal secondo dopoguerra una reazione che ha comportato a partire dagli anni cinquanta un'adesione diffusa e quasi incondizionata all'assiomatica ed al formalismo. Quest'adesione giunse peraltro con ritardo, mentre altrove il modello assiomatico era già in crisi nella ricerca e cominciava ad esserlo nell'insegnamento, producendo il paradosso che in Italia , fino a pochi anni fa (quando l'infatuazione per l'assiomatica ha cominciato a declinare) veniva proposto come modello 'per l'avvenire' ciò che all'estero veniva già gettato alle ortiche. Questa adesione ha comportato la diffusione di un' *immagine* della matematica come una sorta di branca della logica o, come si è detto esplicitamente una *sintassi del pensiero 'puro'* , ed ha avuto notevoli conseguenze sul modo di vedere il ruolo della matematica nell'analisi dei processi reali.

Non è quì possibile, anche per evidenti motivi di spazio, ricostruire gli aspetti della concezione assiomatico-formalista del rapporto fra matematica e realtà. Ci limiteremo ad alcuni cenni, che ci permetteranno anche di entrare nel vivo del nostro tema. Quella concezione non ha peraltro caratteristiche univoche ma si presenta sotto forme e con accentuazioni diverse. Il punto di vista più estremo è quello del gruppo cosiddetto "Bourbaki": esso predica la separazione netta fra matematica e scienze ed affida l'interazione fra la prima e le seconde al caso, o meglio ad una sorta di miracoloso e misterioso adattamento reciproco dovuto ad oscure cause di natura metascientifica:

> « Che vi sia una connessione stretta fra i fenomeni sperimentali e le strutture matematiche, è ciò che sembrano confermare nel modo più inatteso le scoperte più recenti della fisica contemporanea; ma noi ne ignoriamo totalmente le ragioni profonde (per quanto si possa dare un senso a questi termini) e forse le ignoreremo sempre. Ma vi è una constatazione che potrebbe, su questo punto, incitare i filosofi nel futuro ad una maggiore prudenza: prima degli sviluppi rivoluzionari della fisica moderna,si è spesa molta fatica per derivare le matematiche dalle verità sperimentali, in particolare da intuizioni spaziali immediate [...] Ma, in fin dei conti, questa intima fusione di cui ci si faceva ammirare l'armoniosa necessità, non appare ormai altro che come il contatto fortuito di due discipline i cui legami sono molto più nascosti di quanto si poteva supporre *a priori* .
>
> Nella concezione assiomatica, la matematica appare in sostanza come una riserva di *forme* astratte - le strutture matematiche; e accade - senza che si sappia bene perché - che certi aspetti della realtà sperimentale si modellano entro alcune di queste forme, come per una sorta di preadattamento.» (1)

Il punto di vista "bourbakista" ha avuto, nella sua estrema e semplice schematicità, l'influsso di gran lunga più rilevante nel formare, in particolare nel campo dell'insegnamento, una visione della matematica come logica o 'pensiero puro'. Ma non può dirsi l'unica espressione del punto di vista assiomatico. Uno sguardo alle concezioni 'più classiche' dell'assiomatica, dovute a scienziati o matematici operanti a contatto diretto con le applicazioni, offre un panorama assai più movimentato e problematico. In primo luogo, è bene ricordare con quanta preoccupazione proprio il 'padre' dell'assiomatica, David Hilbert, indicasse il pericolo di una degenerazione del metodo astratto e formalistico nella tendenza alle costruzioni totalmente libere ed incontrollate, alle generalizzazioni fine a sé stesse, non vincolate da nessun criterio di 'utilità' o di 'concretezza'. Vogliamo citare qui due brevi brani dovuti o due fra i massimi scienziati del nostro secolo - Albert Einstein e John von Neumann - i quali, pur convinti della necessità di adottare il punto di vista assiomatico, indicavano in modo nitido i limiti ed i rischi di una totale sconnessione della matematica dal campo delle ricerche empiriche. Scriveva Einstein:

> « Come accade che la matematica, che è un prodotto del pensiero umano ed è indipendente da ogni esperienza, si adatti in modo così meraviglioso agli oggetti della realtà? La ragione umana sarebbe dunque capace di scoprire, senza far ricorso all'esperienza, le proprietà degli oggetti reali mediante la sua sola attività? » (2)

La risposta di Einstein non era 'rinunciataria' come quella "bourbakista", ma tentava di demarcare assai chiaramente i confini dell'approccio astratto:

> « A questa domanda bisogna rispondere, secondo me, al modo seguente: nella misura in cui le proposizioni della matematica si riferiscono alla realtà non sono certe, nella misura in cui sono certe non si riferiscono alla realtà. La chiarezza perfetta su questo tema è potuta divenire comune soltanto grazie a quella tendenza in matematica che è nota sotto il nome di *assiomatica* . Il progresso realizzato da quest'ultima consiste nel fatto che la parte logica e formale è accuratamente separata dal contenuto oggettivo o intuitivo. Secondo l'assiomatica, la parte logica e formale costituisce essa sola l'oggetto della matematica, ma non il contenuto intuitivo o un altro ad esso associato. [...]. Questa concezione degli assiomi, rappresentata dall'assiomatica moderna, sbarazza la

matematica da tutti gli elementi che non gli appartengono e dissipa così l'oscurità mistica che avviluppava un tempo i suoi fondamenti. Una siffatta esposizione epurata rende anche evidente che la matematica come tale è incapace di enunciare alcunché, sia circa gli oggetti della rappresentazione intuitiva, sia circa gli oggetti della realtà. […] Ma è d'altra parte certo che la matematica in generale e la geometria in particolare debbono la loro esistenza al nostro bisogno di sapere qualcosa circa il comportamento degli oggetti reali. Il termine di geometria che significa misura del terreno lo prova già. […] E' chiaro che il sistema di concetti della geometria assiomatica da solo non può servire a formulare alcun enunciato sul comportamento di quella specie di oggetti della realtà che vogliamo chiamare *corpi praticamente rigidi* . Per poter fornire degli enunciati di questo tipo, la geometria dovrebbe essere spogliata del suo carattere logico e formale, in modo che possa coordinare ai concetti schematici vuoti della geometria assiomatica degli oggetti della realtà accessibili all'esperienza. […] La geometria così completata è manifestamente una scienza derivata dall'esperienza; noi possiamo anche considerarla come la branca più antica della fisica. I suoi enunciati riposano essenzialmente sull'induzione dell'esperienza e non soltanto su delle deduzioni logiche.» (3)

Nel brano che segue John von Neumann sottolinea che la vitalità e l'efficacia della matematica nasce dal fatto che essa si contamina continuamente di idee empiriche e, pur sostenendo la necessità che si essa si sviluppi su un terreno astratto indica i rischi della separazione fra matematica ed applicazioni:

« Io penso che sia una buona approssimazione della verità — la quale è troppo complicata per consentire null'altro che approssimazioni — affermare che le idee della matematica trovino la loro origine nell'empiria, sebbene la genealogia sia talvolta lunga ed oscura. Ma, non appena esse sono state così concepite, l'argomento inizia a vivere di una peculiare vita propria e somiglia di più ad una attività creativa, guidata quasi interamente da motivazioni estetiche, che non ad un'altra qualsiasi tematica ed in particolare ad una scienza empirica. Vi è tuttavia un ulteriore aspetto che ritengo debba essere sottolineato. Se una disciplina matematica viaggia lontano dalla sua sorgente empirica o, addirittura, se si tratta di una seconda o terza generazione ispirata soltanto indirettamente da idee provenienti dalla "realtà", essa corre gravi rischi. Essa diventa sempre più puramente estetizzante, sempre più e puramente *l'art pour l'art* . Ciò può non essere un male se il campo di ricerca è circondato da argomenti correlati, che possiedono ancora connessioni empiriche più strette, o se la disciplina è sotto l'influsso di uomini dotati di sensibilità eccezionalmente sviluppata. Ma vi è il grave pericolo che la ricerca si sviluppi lungo la linea di minima resistenza, che la corrente, così lontana dalla sua sorgente, si separi in una moltitudine di rami insignificanti e che la disciplina diventi una massa disorganizzata di dettagli e di complessità. In altre parole, quando si trova a grandi distanze dalla sua sorgente empirica, o dopo molti sviluppi "astratti", un argomento matematico corre un rischio di degenerazione. [...] Quando questo stadio è raggiunto, l'unico rimedio a me sembra essere quello di un ritorno rigeneratore alle fonti: la iniezione di idee più o meno direttamente empiriche. Sono convinto che questa sia sempre stata una condizione necessaria per conservare la freschezza e la vitalità della disciplina e che lo resterà anche nel futuro.»(4)

Tuttavia, come si è detto, è prevalso in Italia , a partire dagli anni cinquanta un punto di vista più vicino a quello "bourbakista", tendente ad considerare la matematica non soltanto come una sorta di dipartimento della logica formale ma addirittura come una sorta di *sintassi del pensiero puro* . Le ragioni di ciò hanno origini lontane che trascendono il problema specifico della matematica e del suo insegnamento e sono collegate con la riforma Gentile dell'insegnamento. Con quella riforma si affermò l'idea che il contenuto di 'pensiero' della scienza (e quindi anche della matematica) appartiene tutto alla filosofia. Secondo questo punto di vista, Galileo, Descartes ed anche Newton sono 'accettati' nell'insegnamento secondario come 'pensatori' esclusivamente in quanto sono anche dei filosofi: la loro produzione scientifica (quando è menzionata) appare esclusivamente come un sottoprodotto del loro 'pensiero' in quanto filosofi. Non la scienza ma soltanto il pensiero filosofico può dire qualcosa circa i fenomeni reali. La matematica quindi non ha quindi alcun ruolo conoscitivo nei confronti della realtà: essa, come le altre discipline scientifiche, è un cumulo di pseudoconcetti senza alcun valore sul piano conoscitivo ed aventi soltanto utilità *pratica* . Si crea così una dicotomia fra insegnamento delle materie scientifiche, ridotto esclusivamente ad *addestramento* a compiere operazioni tecniche, ed insegnamento della filosofia, che ha come scopo quello di insegnare a 'pensare'. Le prime, in quanto 'materie pratiche', debbono essere mantenute in una separatezza che sanzioni la loro incapacità di farci conoscere alcunché della realtà; la seconda soltanto ha valore unificante e conoscitivo. L'insegnamento delle lingue classiche fornisce poi il modello delle *forme operative* che il pensiero deve seguire. La centralità dell'insegnamento del latino ha avuto in questa concezione un ruolo determinante nel plasmare di sé tutto il resto della metodologia dell'insegnamento. Così anche nella didattica della matematica si è introdotto un modo di insegnare ed apprendere del tutto simile a quello delle regole della grammatica e della sintassi latina: la matematica perde, in questa visione, qualsiasi valore concettuale e diventa un colossale manuale di regole operative, di 'ricette': ed a questo modo di concepirla ed insegnarla è certamente legata l'immagine di aridità e di infelicità che la matematica ha per tanto tempo diffuso intorno a sé.

Quanto precede spiega a nostro avviso perché, dopo che la sconfitta subita da Enriques nel suo conflitto col neo-idealismo e dopo che la riforma Gentile aveva posto al centro dell'insegnamento un'impostazione idealistica e tendente a svalutare il valore culturale della scienza, vi fossero tutte le premesse per accettare, fra le varie revisioni possibili dell'insegnamento della matematica, soltanto quelle che ne accentuassero il carattere *astratto* e *separato* dal resto delle altre discipline. Quindi, non più la matematica come complesso di aride regole operative senza alcun fine, ma la matematica come *sintassi del pensiero* : il passo sembra lungo ma in realtà è breve, perché in tal modo *la collocazione culturale ed il ruolo della matematica nel contesto delle connessioni interdisciplinari non cambia in modo sostanziale* . Ad esempio, non può dirsi che *ancor oggi* sia mutata in modo significativo la trattazione del rapporto fra matematica e fisica, che è quasi inesistente nell'insegnamento secondario e che è invece un nodo cruciale nella presentazione della funzione applicativa della matematica: carenza questa tanto più paradossale in un periodo in cui questo nesso così centrale mostra tutti i suoi aspetti critici.

Ma prima di entrare in questi aspetti specifici soffermiamoci brevemente su di un'altra considerazione di carattere generale.

Si è già rilevato come gli influssi della concezione assiomatico-formalista si vadano affievolendo, e non soltanto nel mondo della ricerca scientifica — dove questo processo è in atto da tempo — ma anche nel mondo della divulgazione e dell'insegnamento. L'esplosione della tecnologia spinge verso rischi di natura opposta, tendendo a svalutare l'importanza delle funzioni conoscitive a vantaggio di quelle pratico-operative. Se, da un lato, esce così battuta la vecchia visione idealistica, i rischi che si profilano non sono minori. Per quanto riguarda le materie scientifiche il rischio è ora che si riproponga un altro punto di vista non meno svalutativo — e, per quanto riguarda la matematica, non meno svalutativo del suo ruolo nell'interpretazione dei fenomeni reali. Questo rischio è legato alla diffusione indiscriminata ed acritica del calcolo numerico e dell'uso dei calcolatori, alla diffusione di idee confuse e mitiche circa la cosidetta "intelligenza artificiale", con il risultato, come accenneremo in seguito, di riproporre una forma di negazione della matematica come scienza capace di produrre *leggi* descrittive ed esplicative dei fenomeni reali.

Perché parliamo insistentemente della *funzione conoscitiva* della scienza ed in particolare della matematica, dell'importanza della ricerca delle *leggi scientifiche* contrapposta alla tendenza ad accontentarsi di informazioni frammentarie e di valore esclusivamente pratico? Quali sono i caratteri delle funzioni della matematica nella descrizione e nell'analisi dei processi reali, che sono state oscurate e che rischiano di essere ancor più oscurate nel futuro? Giungiamo così al problema di identificare alcuni *nodi tematici* centrali concernenti i metodi e i concetti che intervengono nell'analisi matematica della realtà: essi ci conducono anche al centro dei temi che dovrebbero essere oggetto di un insegnamento della matematica applicata non soltanto moderno, ma avente un contenuto *culturale* e non meramente pratico. Diciamo subito che al centro di un siffatto insegnamento deve essere presente una adeguata consapevolezza storica, perché nulla può guidarci meglio nella comprensione di questo genere di problemi della conoscenza della loro formazione e della loro evoluzione storica.

Due di questi nodi tematici centrali sono stati individuati all'inizio: si tratta del ruolo della fisica come modello dell'uso della matematica nella descrizione dei fenomeni reali, e delle difficoltà cui tale modello va incontro quando si fuoriesce dal dominio della fisica per toccare quello della biologia, dell'economia, delle scienze sociali. Nel corso della nostra discussione sottolineeremo man mano quegli aspetti che sono di importanza fondamentale dal punto di vista dell'insegnamento e della divulgazione. Osserviamo preliminarmente, al riguardo, che una delle più grandi 'riforme' nell'insegnamento della matematica e del suo ruolo applicativo, sarebbe quella di evidenziare sempre l'aspetto concettuale di questioni che si presentano sotto una veste che solo in apparenza è esclusivamente tecnica.

Va innanzitutto rilevato che non si può parlare di un rapporto *organico* fra matematica e studio dei fenomeni fino al Seicento. Che vi siano state anche in precedenza delle connessioni è evidente, anche se questa evidenza è stata più volte oscurata: tale è il caso della tematica classica delle costruzioni con riga e compasso che è stato uno dei temi centrali della geometria per molti secoli, e almeno fino al Seicento, e che rifletteva la limitazione degli strumenti della tecnica ad operazioni basate sopratutto sul tracciamento di rette e cerchi.(5) Si trattava comunque di *connessioni* di carattere più o meno episodico e non di un rapporto organico. La nascita di questo rapporto organico coincide con la nascita della *nuova fisica* , il cui nucleo è la *meccanica* ed in particolare la *meccanica celeste* . Questa osservazione è centrale perché anche nella modellistica contemporanea il modello fisico, ed in particolare quello meccanico, costituiscono tuttora il punto di riferimento centrale e più importante. Ma parlare genericamente della nascita di un rapporto organico fra la matematica e la 'nuova fisica' sarebbe riduttivo ed in fin dei conti sbagliato: poiché questo rapporto organico si instaura con una *nuova matematica* , una matematica adatta a descrivere i fenomeni di carattere dinamico e che è, come ben sappiamo, *il calcolo infinitesimale* . Il calcolo infinitesimale è lo strumento chiave della scienza moderna basata sull'analisi matematica dei fenomeni: esso è quindi intriso delle concettualizzazioni di tipo meccanico assieme a cui è nato — ed è questo un altro punto cruciale che non viene mai sottolineato abbastanza.

Queste concettualizzazioni sono caratterizzate da alcuni aspetti fondamentali che riassumeremo ora assai sinteticamente.

Il primo luogo, l'abbandono di un punto di vista *qualitativo* nella descrizione dei fenomeni a favore di un punto di vista *quantitativo* . Per spiegare questa transizione, che caratterizza i metodi di tutta la scienza moderna, si può ricorrere a moltissime citazioni e letture. Io trovo, tuttavia, che non ve ne sia nessuna migliore di quel brano del *Dialogo dei massimi sistemi* di Galileo, in cui Galileo, nelle vesti di Salviati, discute con l'aristotelico Simplicio, e mostra come un risultato matematico 'astratto' (in questo caso, il fatto che una sfera tocca un piano ad essa tangente in uno ed un sol punto) sia adeguato a descrivere la realtà fisica 'concreta', purché si faccia astrazione degli "impedimenti" della materia, cioé delle complicazioni 'inessenziali' con cui il fenomeno si presenta ai nostri occhi.(6) Questo brano dovrebbe essere letto e commentato in ogni liceo. La sua lettura è facile dal punto di vista letterale, assai difficile se si vuole penetrare a fondo il significato del testo. Ma questo brano consente di mettere a fuoco come pochi altri su quale sottilissima ed in definitiva 'arbitraria' scelta poggi l'avvicinamento delle 'realtà' astratte e puramente concettuali della matematica alla realtà fisica. Nella realtà fisica nessuna sfera tocca un'altra sfera o un piano in un solo punto, ma solo accettando tale astrazione, che esprime una sorta di 'caso limite' noi possiamo penetrare nel significato più profondo dei fenomeni. Occorre far ben capire questo difficile ma affascinante aspetto: e cioé che la trattazione quantitativa e matematica dei fenomeni ha bisogno di un movimento paradossale: e cioé che, per comprendere meglio la realtà concreta occorre *allontanarsi* dalle forme in cui essa si presenta *immediatamente* a noi, occorre apprestare ed utilizzare un *diaframma intellettuale* , che è appunto il *modello matematico* .

Tocchiamo ora un aspetto più specifico. Mentre nella fisica pre-galileiana i fenomeni del moto venivano descritti mediante proprietà e differenze qualitative dello spazio (differenza fra 'alto' e 'basso', fra corpi celesti incorruttibili e mondo terrestre corruttibile, e così via), nella fisica moderna, a partire da Galileo, l'introduzione di un punto di vista quantitativo impone di considerare lo spazio come una struttura vuota, uno schema ideale entro il quale si svolgono i fenomeni: quindi un ente matematico astratto, quel *continuum* geometrico tridimensionale che ormai è per noi una nozione abituale e che interviene in tanta parte delle nostre schematizzazioni matematiche dei fenomeni. Occorre quindi chiarire che, quando noi facciamo uso della cosidetta rappresentazione 'cartesiana' , e cioé descriviamo dei processi entro uno schema geometrico basato sulla considerazione dei numeri reali (retta cartesiana reale R, piano cartesiano R^2, spazio cartesiano a tre dimensioni R^3), ricorriamo ad una concezione spaziale astratta del tipo sopradetto e cioé basata su una visione quantitativa, astratta e *continua* dei processi in esame.

Un altro aspetto davvero cruciale introdotto dalla fisica galileiana - e che è tuttora uno dei punti nodali (e spesso assai controversi) della modellizzazione matematica dei fenomeni - è la concezione matematica del tempo, che corre in stretto parallelismo con la concezione matematica dello spazio di cui si è detto sopra. Anche il tempo non viene più concepito come un'entità concreta, come 'durata' disomogenea o come un susseguirsi di eventi 'discreti': esso viene invece concepito come un 'fluire' indistinto, omogeneo e ininterrotto, anch'esso quindi come un *continuum* geometrico. Il tempo è quindi nient'altro che una variabile matematica omogenea: insistiamo su questo aspetto che comporta la perfetta equivalenza di tutti gli istanti temporali e la perfetta simmetria del passato rispetto al futuro, cioé la completa *reversibilità* del tempo. La sua rappresentazione matematica è la retta reale R.

Sarebbe davvero assai importante riuscire a divulgare il seguente nesso fondamentale (che ha anche un valore interdisciplinare di prima grandezza, perché investe non soltanto il nodo del rapporto fra matematica e fisica ma anche fra matematica e fisica da un lato e filosofia dall'altro, per quanto riguarda lo studio delle diverse concezioni storiche del tempo e dello spazio): e cioé che la concezione dello spazio e del tempo come dei *continuum* geometrici astratti ed 'assoluti' nel senso sopra descritto) si traduce nelle ipotesi matematiche che lo spazio sia *omogeneo* (tutti i punti dello spazio sono equivalenti) ed *isotropo* (tutte le direzioni dello spazio sono equivalenti), ed inoltre che anche il tempo sia *omogeneo* (tutti gli istanti temporali sono equivalenti) ed *isotropo* (passato e futuro sono simmetrici, cioé lo scorrere del tempo è perfettamente reversibile). Un altro nodo concettuale che è più difficile (ma tutt'altro che impossibile) spiegare — almeno in quelle scuole che, come i licei scientifici, mettono a disposizione un minimo di bagaglio tecnico-matematico di calcolo infinitesimale — è che le *leggi di conservazione* della meccanica (conservazione dell'energia, della quantità di moto e del momento della quantità di moto), che così spesso vengono insegnate quasi a memoria, sono nient'altro che la traduzione matematica delle ipotesi che il tempo e lo spazio siano omogenei ed isotropi.

Arriviamo infine alla matematica 'necessaria' per studiare i processi dinamici entro un quadro concettuale-matematico come quello sopradescritto, e cioé il calcolo infinitesimale. Occorre comprendere e far comprendere che il calcolo infinitesimale è la matematica creata 'ad hoc' (sopratutto da Newton) per la nuova scienza dinamica.(7) I concetti di derivata e di equazione differenziali sono gli strumenti chiave per la descrizione dei processi dinamici. Noi non conosciamo ancor oggi nessuna forma di concettualizzazione e di tecnica matematica così generale e coerente rispetto all'obbiettivo di descrivere i processi dinamici quanto il calcolo differenziale ed integrale: questo primato che si è mantenuto in modo esclusivo fino alla fine dell'Ottocento è sembrato essere insidiato dall'approccio algebrico e geometrico astratto agli inizi del nostro secolo. E di fatto al primato esclusivo dell'approccio infinitesimale si è sostituita una molteplicità di metodi e tecniche molto più articolata. Ma le speranze di soppiantare definitivamente l'approccio classico si sono molto temperate in tempi più recenti: ed anzi oggi la rinascita dell'interesse (di un interesse talora quasi frenetico) per lo studio dei cosiddetti *sistemi dinamici* ha segnato la ripresa travolgente di quella che il matematico statunitense Smale ha chiamato la "matematica del tempo", con il bagaglio tradizionale, se pur rinnovato e ammodernato, delle tecniche differenziali.

Cosa ha introdotto difatti la scienza fisico-matematica entro gli schemi astratti dello spazio e del tempo che abbiamo sopra descritti? Essa ha introdotto degli oggetti matematici capaci di descrivere i processi del moto: e cioé delle *equazioni differenziali* . Ed in particolare la famosissima equazione di Newton, $f = ma$ (dove m è la massa di un punto materiale, a la sua accelerazione ed f la forza cui è soggetto), la quale è per l'appunto un'equazione differenziale, poiché l'accelerazione a è d^2s/dt^2 , cioé la derivata seconda dello spazio rispetto al tempo.

Un aspetto concettuale fondamentale della matematizzazione dei fenomeni, e che ancor oggi, anzi forse sopratutto oggi, è uno dei nodi più dibattuti e controversi, è la *concezione meccanicista* dei fenomeni, la quale consiste nell'affermare che tutti i fenomeni sono in ultima analisi riducibili a fenomeni di carattere meccanico e quindi descrivibili con lo schema proposto da Newton ed inoltre hanno carattere *deterministico,* il che vuol dire che la conoscenza dello stato presente di un sistema *determina in modo univoco* la sua evoluzione futura e passata. L'espressione più chiara di questo punto di vista fu proposta da Laplace agli inizi dell'Ottocento. Ricordiamo rapidamente le parole efficaci con cui egli descrive il programma meccanicista [(8)]:

> « Tutti gli eventi, anche quelli che, per la loro piccolezza, sembrano non dipendere dalle grandi leggi della natura, ne sono una conseguenza altrettanto necessaria delle rivoluzioni del sole. Per l'ignoranza dei legami che li uniscono al sistema intero dell'Universo, li si è fatti dipendere dalle cause finali o dal caso, secondoché si producevano e si susseguivano con regolarità, o senza ordine apparente; ma queste cause immaginarie sono state successivamente allontanate assieme ai confini delle nostre conoscenze, e scompaiono completamente di fronte alla sana filosofia che non vede in esse altro che l'espressione della nostra ignoranza delle cause vere.»

Il seguito di questo brano è uno dei più chiari enunciati dell'approccio deterministico-meccanicistico nella descrizione dei fenomeni. Non vi è dubbio che anche questo è uno dei brani classici che occorrerebbe leggere e commentare in modo approfondito al fine di descrivere questo approccio.

> « Gli eventi attuali hanno un legame con quelli che li precedono, il quale è fondato sul principio evidente che una cosa non può cominciare ad essere, senza una causa che la produca. Questo assioma, noto col nome di *principio di ragion sufficiente,* si applica anche a quelle azioni considerate come indifferenti. La volontà più libera non può produrle senza un motivo determinante; difatti, se tutte le circostanze di due posizioni fossero esattamente simili, ed essa agisse nell'una e non nell'altra, la sua scelta sarebbe un effetto senza causa: essa sarebbe allora, dice Leibniz, il caso cieco degli epicurei. Noi dobbiamo dunque considerare lo stato presente dell'Universo, come l'effetto del suo stato precedente, e come la causa del seguente. Una intelligenza che, in un istante dato, conoscesse tutte le forze che animano la natura, e la situazione

rispettiva degli esseri che la compongono, se fosse così elevata da sottoporre questi dati all'analisi, racchiuderebbe nella stessa formula, i moti dei più grandi corpi dell'Universo e dell'atomo più leggero: nulla sarebbe incerto per essa, e l'avvenire come il passato sarebbe presente ai suoi occhi. Lo spirito umano offre, con la perfezione che ha saputo dare all'Astronomia, un pallido abbozzo di questa intelligenza. Le sue scoperte nella Meccanica e nella Geometria, unitamente a quelle della gravità universale, l'hanno messo in condizione di cogliere entro le stesse espressioni analitiche, gli stati passati e futuri del sistema del mondo. Applicando lo stesso metodo ad alcuni altri oggetti delle sue conoscenze, esso è riuscito a ricondurre a leggi generali, i fenomeni osservati, e a prevedere quelli che dovevano seguire da circostanze date. Tutti i suoi sforzi nella ricerca della verità, tendono ad avvicinarlo incessantemente all'intelligenza che noi abbiamo concepito ma dalla quale resterà sempre infinitamente lontano. Questa tendenza caratteristica della specie umana, è ciò che la rende superiore agli animali; e i suoi progressi in questo senso, distinguono le nazioni e i secoli, e costituiscono la loro vera gloria.»

Nella concezione meccanicista 'stretta', tutti i fenomeni sono causati da forze e quindi sono di tipo meccanico ed i fenomeni meccanici sono retti dalla legge generale di Newton ($f = ma$). Quindi, $f = ma$ è la chiave esplicativa di ogni fenomeno, almeno in linea di principio. Per di più, questa equazione individua un problema matematico assai preciso, poiché, come si è detto, è un'equazione differenziale: risolverla significa determinare la traiettoria del punto materiale, cioé la forma geometrica della curva che esso percorre nello spazio e il modo in cui la percorre nel tempo. La matematica ci mostra che è possibile (almeno in linea di principio) determinare in modo unico questa traiettoria se, oltre ad essere nota f , è noto lo *stato iniziale* del punto, e cioé la sua posizione e la sua velocità nell'istante in cui inizia la nostra osservazione.

Quindi, il principio del determinismo ha come corrispettivo matematico un *teorema di esistenza ed unicità* per le soluzioni di un'equazione differenziale : nulla sarebbe più ignoto ad un'intelligenza che, *in un istante dato, conoscesse tutte le forze che animano la natura, e la situazione rispettiva degli esseri che la compongono* (posto che ogni fenomeno è riducibile al moto di punti materiali) e che fosse così *elevata* da saper risolvere le equazioni differenziali corrispondenti.

La meta è infinitamente lontana ma la via è ben tracciata ed indica un preciso programma fisico e matematico: analisi empirica delle forze determinanti i fenomeni e analisi matematica delle equazioni differenziali relative. Ed è qui che il programma meccanicista 'stretto' entra in crisi: è difatti evidente che l'analisi fisica delle forze in gioco presenta problemi di difficoltà insormontabile; ma anche nei casi in cui si è capaci di sviluppare questa analisi, il problema della risoluzione analitica delle equazioni differenziali corrispondenti può presentare difficoltà insormontabili.(9) E' questo un tema oggi di grande attualità nello studio dei cosidetti sistemi dinamici 'caotici' o 'imprevedibili'.

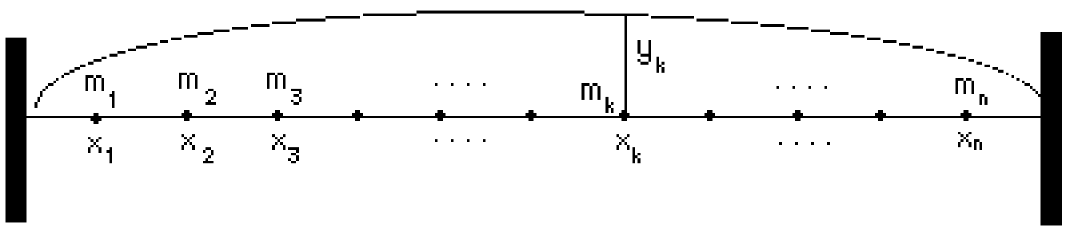
Un esempio è dato dal cosiddetto "problema degli n corpi" che schematizza il moto di un sistema di n corpi soggetti alla sola forza di attrazione gravitazionale. La legge di gravitazione universale di Newton stabilisce che la forma della forza di attrazione gravitazionale fra due corpi di massa m_1 e m_2 è data dall'espressione km_1m_2 / r^2, dove r è la distanza fra i due corpi e k la costante di gravitazione universale. Quindi il problema è esclusivamente matematico: si tratta di risolvere un sistema di n equazioni differenziali del tipo $f_i = m_ia_i$, ognuna delle quali descrive il moto del corpo i , e in cui l'espressione della forza f_i è data dalla formula precedente. Il problema dei 2 corpi era stato risolto in modo completo da Newton. Il problema dei 3 corpi (che schematizza un sistema del tipo Sole-Terra-Luna) resistette invece ad ogni tentativo di ottenere una soluzione generale fino a che, verso la fine del secolo scorso, Henri Poincaré dimostrò che una siffatta soluzione generale era impossibile. Egli mostrò difatti che impossibile *calcolare esplicitamente* le soluzioni, pur restando salvo il principio che le condizioni iniziali del sistema determinano in modo univoco la sua evoluzione nel tempo futuro e passato. Ma c'è di peggio: in talune circostanze una *piccola* modificazione delle condizioni iniziali non cambia *di poco* l'evoluzione del sistema, ma può cambiarla radicalmente. Il fenomeno si presenta con caratteristiche 'caotiche' o 'imprevedibili': la conoscenza dello stato iniziale del sistema non consente di prevedere la sua evoluzione futura, in quanto essa viene radicalmente modificata da una sia pur piccola perturbazione di quello stato iniziale.

Quindi la concezione meccanicistica *in senso stretto* ha avuto vita breve ma una molto maggiore vitalità ha avuto (ed ha tuttora) il meccanicismo *in senso lato* , inteso cioé come una *visione deterministica* dei fenomeni che propone lo schema meccanico non come un modello da seguire strettamente — si riconosce cioé che non tutti i fenomeni sono spiegabili come dovuti al moto di corpi — ma come un *modello esplicativo generale* che è di guida nella matematizzazione di ogni fenomeno.

Qui interviene un secondo concetto chiave che pervade tutta la problematica della matematica applicata: il concetto di *riduzionismo*. Con il termine 'riduzionismo' intendiamo la tendenza a ricondurre la spiegazione di ogni fenomeno ad un quadro esplicativo e concettuale preassegnato. Il meccanicismo è la forma più nota di riduzionismo: esso propone di 'ridurre' ogni fenomeno a un processo meccanico e quindi a ricondurre ogni aspetto della realtà allo schema newtoniano. Ma, quando si parla di 'riduzionismo' è ormai usuale riferirsi alla concezione meccanicistica 'in senso lato', cioé ad uno schema esplicativo meno rigido e i cui concetti-chiave abbiamo già illustrato: la concezione dello spazio come un *continuum* geometrico e del tempo come variabile matematica, l'idea che tutti i processi hanno carattere *deterministico* , *continuo* e *reversibile* . A ciò si accompagna l'armamentario matematico connaturato a questa concezione e cioé la descrizione dei fenomeni mediante equazioni differenziali (sia pure di vario tipo).

Il paradigma riduzionista ha avuto e nonostante tutto continua ad avere una grande forza di attrazione. Oggi è aperto un dibattito molto vivace sulla possibilità di tener fermo un paradigma di tipo riduzionistico nella matematizzazione delle scienze non fisiche, in particolare nella biologia e nell'economia(10). La comprensione profonda del significato e della portata della concezione riduzionista è quindi di importanza fondamentale e di grande attualità. Non è però qui possibile neanche abbozzare una trattazione diffusa di un tema così complesso ed ampio: maggiori dettagli potranno trovarsi nel volume *Modelli matematici* già citato nella nota (6) — nonostante questa trattazione sia anch'essa alquanto sommaria.

Vogliamo qui limitarci ad un esempio (che, come tanti altri consimili, potrebbe costituire un ottimo 'materiale didattico') il quale illustra come nella concezione riduzionistica si affronti la difficoltà di fornire una descrizione meccanica corpuscolare di un processo. Il paradigma 'continuista' viene assunto come tecnica per ricondurre comunque la descrizione del processo ad una descrizione di tipo meccanico basata sulla legge di Newton. L'esempio cui ci riferiamo è relativo al modo in cui D'Alembert ricavò l'equazione delle 'corde vibranti'. Si tratta di descrivere il moto di una corda che vibra essendo fissata ai suoi estremi (si pensi alla vibrazione della corda di uno strumento). Una descrizione basata su un'applicazione stretta della legge di Newton vorrebbe che si risolvesse un'equazione del tipo $f = ma$ per ogni particella elementare costituente la corda: ma questa pretesa 'ideale' è talmente ambiziosa da sfociare nel ridicolo. Quel che noi conosciamo è soltanto la massa M della corda e la sua lunghezza l. Suddivideremo allora la corda in n parti eguali, supponendo che all'estremità di ciascuna di esse sia appesa una massa m_i $(1 \leq i \leq n)$ che costituisce la n -esima parte della massa totale: quindi la corda è schematizzata (come in figura) da n masse discrete egualmente spaziate (x_i è la coordinata della massa m_i) e collegate fra di loro da tratti di corda eguali, senza peso, elastici ed inestensibili.



Ad ognuna delle masse m_i è applicabile la legge di Newton. Già Bernouilli, studiando la forza esercitata sulla massa k -esima aveva mostrato che , se y_k è lo spostamento della massa k -esima l'equazione di Newton si scrive:

$$\frac{d^2 y_k}{dt^2} = \frac{(n\,a)^2}{l^2}\left(y_{k+1} - 2\,y_k + y_{k-1} \right)$$

dove $a_2 = lT/M$ (T è la tensione della corda). L'idea cruciale di D'Alembert fu quella di considerare una suddivisione all'infinito della corda: in tal modo la lunghezza dei segmentini diveniva sempre più piccola ("infinitesima") e così accadeva per la massa di ognuno dei corpi. Veniva così applicata l'idea della descrizione *continua* dello spazio e del tempo anche allo schema descrittivo del singolo fenomeno in esame, sostituendo la descrizione corpuscolare con una descrizione continua che ne rappresentava una buona approssimazione e consentiva di riaffermare la validità del calcolo infinitesimale come strumento descrittivo dei fenomeni. E' da notare che la descrizione continua è perfettamente coerente con quella corpuscolare, in ragione del carattere matematico astratto di quest'ultima: ogni corpuscolo o punto materiale è nient'altro che un punto geometrico dotato di massa. La materia è perciò soggetta ad un principio di *perfetta divisibilità* , lo stesso che consente l'utilizzazione dello schema matematico dei numeri reali. Così la corda vibrante è identificabile con un segmento della retta reale dotato di massa. Il "passaggio al limite" (consistente nel far tendere la massa m_k a zero e così la lunghezza del segmento di corda congiungente ogni coppia di masse) permette di ottenere l'equazione differenziale delle corde vibranti (x è la coordinata del generico punto della corda e $y(t,x)$ sostituisce y_k):

$$\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2}$$

Essa è un'equazione differenziale di tipo diverso da quelle tradizionali della meccanica newtoniana (è un'equazione alle derivate parziali). Così pur essendosi allargato il campo delle tecniche descrittive della realtà, resta fermo il paradigma esplicativo generale.

Un grande scienziato e matematico italiano, Vito Volterra, ha scritto delle pagine estremamente lucide sul ruolo fondamentale che il metodo del passaggio dal discontinuo al continuo ha nell'analisi matematica classica dei processi reali. Volterra mostrò che molte delle estensioni delle metodologie classiche (estensioni che hanno consentito di allargare il campo di intervento dei metodi del calcolo) si sono basate su questa procedura. Di fatto, Volterra fu il primo ad introdurre il concetto di *funzionale* (o, come egli lo chiamava, di *funzione di linea*) che generalizza il concetto di funzione ordinaria, in quanto il funzionale non dipende da un numero finito di variabili ma da un numero infinito di esse. Esso può ricavarsi con procedimento analogo a quello sopra illustrato e cioé con un passaggio dal finito all'infinito (supponendo cioé che il numero delle variabili da cui dipende la funzione cresca illimitatamente). Oggigiorno l'analisi funzionale è fondata ed insegnata in modo astratto e si tende a dimenticare che i suoi concetti di base vennero creati da Volterra in modo tutt'altro che formale ed astratto, bensì per rispondere al problema di descrivere dei fenomeni specifici che non si prestavano ad essere rappresentati matematicamente con gli strumenti tradizionali: si tratta dell'evoluzione di sistemi "con memoria" e cioé in cui l'evoluzione del sistema non sembra dipendere soltanto dallo stato iniziale ma da tutto il passato del sistema stesso. Così un sistema elastico conserva la "memoria" di tutte le sollecitazioni torsionali cui è stato sottoposto e quindi la sua evoluzione dinamica non dipende soltanto dalla conoscenza di un numero finito di dati (lo stato iniziale del sistema) ma da infiniti dati (il suo passato). Non possiamo approfondire ulteriormente questo esempio, ma esso suggerisce come il punto di vista riduzionistico sia stato capace di adattare i metodi classici ad una molteplicità assai ampia di situazioni.

I limiti di questo breve scritto non consentono di affrontare molte altre questioni di importanza notevolissima, come il problema dell'approccio statistico-probabilistico nella modellizzazione matematica: questi limiti ci impongono di limitarci sopratutto alla discussione dell'approccio deterministico. Richiamiamo soltanto alcuni punti. In primo luogo, nell'approccio deterministico classico, la probabilità è vista soltanto come uno strumento per compensare i limiti dell'ignoranza umana, la quale è incapace di realizzare appieno un programma di tipo laplaciano.[11] La probabilità ha quindi il ruolo di semplice ausilio tecnico. In secondo luogo, anche quando degli sviluppi di enorme portata, come la meccanica quantistica, misero in discussione il paradigma determinista, la tendenza che in definitiva si affermò fu quella propugnata da von Neumann: e cioé di ridurre il principio d'indeterminazione ad assioma della teoria in modo da limitarne la portata concettuale e restaurare almeno in parte l'immagine della fisica come 'scienza delle grandi leggi'.(12) D'altra parte, nella modellistica, non di rado l'approccio 'stocastico' si presenta molto spesso come subordinato ad un preventivo approccio deterministico: e cioé come una perturbazione aleatoria di un modello deterministico sottostante. Va inoltre rilevato che anche il dibattito sui fondamenti delle probabilità può considerarsi tutt'altro che chiuso: in questo dibattito si confrontarono diverse posizioni che tentavano di dare una definizione del concetto di probabilità (come quella 'frequentista') ed altre che, come nel caso di Bruno de Finetti, sostenevano il carattere soggettivo del concetto di probabilità ed in definitiva l'inconsistenza di tutti i tentativi di darne una definizione 'rigorosa'. Questo dibattito è stato soltanto apparentemente chiuso: anche qui l'assiomatica ha avuto il ruolo di nascondere il problema, accontentando il matematico con un sistema formalizzato che ha il merito di 'funzionare' senza che egli si debba porre troppi problemi di significato.

Notiamo infine che si è tentato recentemente di ricavare dalla scoperta del carattere 'caotico' e 'imprevedibile' di taluni sistemi deterministici la conclusione che il determinismo sarebbe ormai definitivamente in scacco, dato che anche entro il quadro deterministico si manifestano dei fenomeni di natura 'essenzialmente' probabilistica. E' questo più o meno il punto di vista di Ilya Prigogine. E' un punto di vista tuttavia discutibile, perché la scoperta dell'imprevedibilità di molti sistemi dinamici non intacca in nulla il loro carattere 'essenzialmente' deterministico, potendosi peraltro persino dire che il carattere imprevedibile e caotico di tali sistemi può essere conseguenza dello schema matematico stesso, cioé del carattere *continuo* del modello.

Un tema di grande importanza è il modo (nonché i limiti e le difficoltà) dell'applicazione della matematica a dei campi applicativi diversi dalla fisica, fra i quali primeggiano per importanza le scienze biologiche, e quelle economiche e sociali. L'applicazione della matematica allo studio dei processi reali non è mai qualcosa di *immediato* , ma necessita al contrario di una precisa metodologia di selezione delle proprietà che si vogliono studiare e del modo di confrontare il modello con i dati empirici nonché, se possibile, di una metodologia sperimentale. E' quindi ben naturale che anche nella modellistica matematica moderna in biologia o nelle scienze economico-sociali abbiano influito i metodi e le tecniche già 'collaudate' in fisica. Quindi la fisica costituisce un punto di riferimento inevitabile. Si tende spesso a dimenticare o a mettere fra parentesi questo aspetto che è invece di importanza centrale. Non appena si svilupparono i primi tentativi di applicare la matematica a domini fino ad allora non toccati dall'analisi quantitativa, il modello della fisica si propose, in modo del tutto spontaneo, come una via da seguire, da imitare. Proprio i suoi successi facevano sperare che l'estensione di metodi e di concetti già utilizzati proficuamente fosse una garanzia di riuscita. Si propose quindi una forma di *riduzionismo* esteso al di fuori del campo tradizionale della fisica-matematica e della fisica, un approccio cioé che indicava come via da seguire e da imitare quella tradizionalmente adottata in queste discipline. Di certo la via da seguire appariva chiara ed in un certo senso già segnata. Ma proprio questa maggiore facilità fu ed è tuttora) fonte di difficoltà gravi e talora gravissime. Perché, in tal modo, si dava implicitamente per scontato qualcosa che non lo era affatto: e cioé che la realtà biologica o quella economica o sociale si prestassero allo stesso tipo di schematizzazioni deterministiche o addirittura meccanicistiche.

Il problema del rapporto con questa forma generale di riduzionismo è più che mai aperto: la modellistica matematica non fisica non ha risolto ancora il problema del suo rapporto con il modello fisico ispiratore. Quest'ultimo è ancora il punto di riferimento più importante, ma anche più ingombrante. Perché offre una via e delle procedure di matematizzazione, e di verifica assai chiare che si applicano però non di rado con estrema difficoltà ai domini delle scienze della vita e della società. Appare difficile negare che in biologia (come in economia o in sociologia) vi sia la necessità di individuare delle procedure di astrazione conducenti al modello matematico che abbiano caratteristiche del tutto specifiche ed autonome; così come appare necessario chiarire cosa si debba intendere in questi campi per *verifica sperimentale* (quando è possibile parlarne!) o almeno per *confronto fra i modelli matematici ed i dati empirici*. Oggigiorno il centro del dibattito sulla possibilità di sviluppare la modellistica matematica in nuovi settori è proprio occupato da questi temi: e sul terreno di questo dibattito si confrontano posizioni assai diverse e spesso in aperta polemica fra di loro, sia fra i matematici che fra gli studiosi delle discipline da 'matematizzare'. Fra i primi vi sono quelli che 'sfornano' disinvoltamente modelli ,senza alcuna preoccupazione per le difficoltà cui abbiamo sopra accennato; altri, come ad esempio Thom, sono polemici nei confronti del punto di vista riduzionistico e propongono una linea di confronto diretto fra modello matematico e realtà basata su un approccio di carattere qualitativo. Diversa è la posizione di un fisico-chimico come Prigogine che, pur esprimendo una critica radicale del riduzionismo, finisce, sia pure in maniera assai sottile, per riproporre una forma di modellizzazione di tipo fisico (basata sui concetti di probabilità e di entropia). D'altra parte, fra gli studiosi delle discipline specifiche si manifestano punti di vista che, anche se non fanno riferimento ad una particolare concezione modellistica, possono essere definiti meccanicisti o riduzionisti, o viceversa si collocano sulla sponda opposta. Così può ben dirsi che gran parte della biologia molecolare si basi su un'idea di "programma genetico" costruita in analogia con quella di programma informatico, che ha un carattere apertamente meccanicistico.

Non possiamo qui approfondire le molte tematiche estremamente difficili che si aprono quando si abborda questo genere di argomenti. Ci limiteremo perciò a toccare un solo tema, che è tuttavia di importanza notevolissima. Uno dei nodi più difficili e critici della modellistica matematica contemporanea in campi diversi dalla fisica è oggi quello della descrizione dei *sistemi complessi* ed in particolare del rapporto fra *complessità* e *stabilità* nei modelli. Cerchiamo di chiarire di cosa si tratti attraverso qualche esempio.

Uno dei campi in cui la modellistica biomatematica ha riscosso i suoi maggiori successi è quello della dinamica delle popolazioni, cioé dello studio delle leggi di crescita di una popolazione o delle leggi di crescita di più popolazioni coesistenti ed interagenti (in competizione fra loro o che si predano a vicenda, e così via). Fin dal Settecento e con maggiore intensità nell'Ottocento vennero studiate l'equazione di crescita esponenziale (o malthusiana) di una singola popolazione:

$$\frac{d\,N(t)}{dt} = k\,N(t)$$

dove $N(t)$ è la popolazione nel tempo e k il tasso di crescita), e l'equazione di crescita logistica (o equazione di Verhulst):

$$\frac{d\,N(t)}{dt} = k\,N(t) - h\,N(t)^2 \quad (13)$$

Negli anni trenta (ad opera sopratutto del matematico italiano Volterra e dello statistico statunitense Lotka) iniziò con grande impeto la modellizzazione dei sistemi biologici di competizione. E' famoso il primo di questi modelli, che descrive un sistema costituito da una sola preda *N(t)* ed un solo predatore *M(t)* , tramite le cosidette equazioni di Volterra-Lotka [14] :

$$\frac{d\,N(t)}{dt} = k_1\,N(t) - h_{12}\,N(t)\,M(t)$$

$$\frac{d\,M(t)}{dt} = -k_2\,M(t) + h_{21}\,N(t)\,M(t)$$

Lo studio di sistemi come questo procede attraverso tecniche consuete nella teoria delle equazioni differenziali, al centro delle quali vi è la ricerca degli stati di equilibrio del sistema e lo studio delle loro proprietà di stabilità, nonché delle proprietà di stabilità 'globale'. Si cerca cioé la risposta a domande del tipo: il sistema possiede stati di equilibrio (cioé stati in cui il numero delle specie si mantiene costante nel tempo) ? Tali stati sono 'stabili' (nel senso che il sistema perturbato di poco dalla posizione di equilibrio tende a tornarvi o almeno a non discostarsene) ? Il sistema è globalmente stabile (nel senso che quale che sia lo stato iniziale del sistema esso tende a collocarsi in equilibrio) ? E, nel caso in cui così non sia, si manifestano fluttuazioni periodiche delle specie ?

I sistemi biologici reali sono in generale "complessi": il che significa che in essi si verifica un numero altissimo di interazioni. Nel caso dei sistemi di popolazioni il minimo che si dovrà pretendere, affinché il modello sia appena un pò realistico è che il numero delle specie (o popolazioni) considerate sia alto. Nasce allora subito un problema: quale relazione esiste nel modello fra *stabilità* e *complessità* ? Precisamente, ad una crescita di complessità corrisponde oppure no, una crescita di stabilità? E la relazione esistente nel modello corrisponde a quella suggerita dai dati empirici? E' questa una interessante tematica che si è sviluppata sopratutto negli ultimi quindici anni ed i cui risultati non possono davvero dirsi esaltanti. [15] Le tendenze previste dai modelli deterministici (come quelli del tipo 'Volterra-Lotka' e le loro generalizzazioni) non sembrano accordarsi in modo soddisfacente con i dati empirici. Ne è nato il tentativo di superare queste difficoltà cercando di vedere se le cose vadano meglio con i modelli stocastici: ma questa è storia recentissima e del tutto aperta.

Al di là di ciò che l'analisi di modelli più sofisticati di quelli deterministici potrà offrire, viene però da porsi una domanda più di fondo. E' davvero adeguato proporre nel campo biologico un tipo di schema di analisi dei fenomeni che ponga al centro concetti di carattere così marcatamente fisico come quelli di *equilibrio* e di *stabilità* ? E' ben vero che concetti di questo tipo ci vengono proposti anche dalle scienze biologiche, ma in questo campo essi hanno probabilmente un significato alquanto diverso da quello che è connaturato a dei modelli matematici dinamici la cui struttura è fortemente condizionata dal modello fisico e nei quali i concetti di stabilità e di equilibrio sono una semplice generalizzazione (se non trasposizione) dei concetti fisici di equilibrio e di stabilità? E' questa una domanda del tutto aperta sulla quale però è importante assumere un atteggiamento di riflessione critica.

Problemi analoghi si presentano nella modellistica economico-matematica. In questo campo il livello di sofisticazione degli strumenti matematici utilizzati ha raggiunto livelli certamente più elevati che in qualsiasi altro settore applicativo fra quelli citati e di livello corrispondente è stato il grado di approfondimento dell'analisi. Ci riferiamo in particolare alla teoria dell'equilibrio economico generale che offre un vasto campo di costruzione di modelli matematici.[16] Ma anche qui si è posto un problema analogo a quello postosi in biologia: le proprietà di stabilità dei modelli si sono rivelate assai insoddisfacenti al crescere della complessità dei modelli stessi. E questo, se non in contraddizione con i dati reali (perché è difficile asserire che i dati empirici mostrino con evidenza delle tendenze dei sistemi economici alla stabilità) almeno con l'assunto della teoria, la quale si proponeva di mostrare delle proprietà di stabilità globale, nel senso in precedenza accennato.[17]

Vogliamo concludere questa esposizione inevitabilmente frammentaria di temi e di problemi con un breve cenno alle questioni dell'analisi numerica e del ruolo del calcolatore nella formulazione e nello studio dei modelli matematici. La risoluzione numerica dei modelli matematici è stata sempre un obiettivo fondamentale per tutti i coloro che hanno applicato la matematica allo studio dei fenomeni reali: l'analisi — osservava il grande fisico-matematico Fourier agli inizi dell'Ottocento — deve condurre « le soluzioni fino alle ultime applicazioni numeriche, condizione necessaria di ogni ricerca e senza le quali si arriverebbe soltanto a trasformazioni inutili ».(18) Un modello che non possa essere risolto o almeno trattato dal punto di vista numerico, non può essere utilizzato per la previsione concreta dei fenomeni che pretende descrivere e quindi appare inutile. E' pertanto ben comprensibile che l'avvento degli strumenti di calcolo — che ha avuto e sta avendo, sopratutto negli ultimi anni, uno sviluppo che è poco definire impetuoso — abbia acceso speranze nuove ed aperto orizzonti fino a poco tempo fa impensabili all'applicazione dei modelli matematici allo studio della realtà. Anche quando il modello presenta intrinseche difficoltà nella risoluzione numerica (come si è accennato parlando del problema dei tre corpi), si sono aperte nuove e fertilissime prospettive. La rappresentazione grafica delle soluzioni di un modello mediante il calcolatore (in particolare nel caso dei sistemi dinamici) permette di ottenere delle informazioni *qualitative* sull'andamento di queste soluzioni e quindi di guidare o almeno suggerire gli sviluppi di un'analisi matematica rigorosa. La tradizionale analisi qualitativa condotta con metodi geometrici, consistente nello studiare l'andamento qualitativo delle soluzioni pur non conoscendole esplicitamente, può avvalersi quindi oggi di un altro potente ausilio.

A tali evidenti ed indiscutibili vantaggi si accompagnano però dei rischi seri che non possono essere sottaciuti e che vanno anzi denunciati con tutta la forza necessaria, proprio in ragione del potere di attrazione talora eccessivo che il *computer* manifesta (in particolare nei giovani in quanto si accompagna ad un gradevole aspetto di 'gioco'). Il rischio principale è di ritenere che il calcolatore possa fare qualcosa di più che l'analisi numerica del modello (cioé consentire di studiarne le soluzioni o di calcolarle in via approssimata): che esso possa fornire le soluzioni o — e questa è l'assurdità più perniciosa — che possa sostituirsi alla normale attività mentale del matematico nella risoluzione di un problema matematico nella sua generalità o addirittura che possa sostituirlo nella formulazione dei modelli matematici.

Di fronte a questo genere di fantasie è bene ribadire due punti. In primo luogo che il calcolatore non è capace di compiere altro che operazioni in numero finito ed è quindi incapace di compiere delle astrazioni quali sono quelle che consentono alla mente del matematico di formulare dei teoremi validi per un numero qualsiasi (anche infinito) di casi. Un calcolatore capace di 'ragionare' in modo diverso (ed in particolare sull'infinito) non è neppure all'orizzonte, nonostante i progressi (talora pretesi) della cosiddetta intelligenza artificiale. In secondo luogo il calcolatore non è in grado di formulare alcuna legge scientifica ma soltanto di eseguire calcoli su leggi formulate a partire da ragionamenti mentali e li sa eseguire soltanto sulla base di dettagliatissime istruzioni impartite dal programmatore.

Alimentare credenze fantasiose circa le capacità del calcolatore può essere alla lunga pericoloso per la stessa ricerca scientifica: è invece *immediatamente* e gravemente pericoloso nel campo dell'istruzione, dove quelle credenze si traducono subito nell'assurda speranza che il calcolatore possa servire a "fare i compiti" e a "risolvere i problemi di matematica". Ed anche se il mancato verificarsi di questa speranza genera la delusione, può comunque diffondersi l'illusione che maneggiare il calcolatore sia la stessa cosa che fare della matematica o addirittura della scienza, inducendo delle forme pericolose di pigrizia mentale o addirittura di vera e propria astensione dal ragionamento. L'insegnamento o almeno l'introduzione ai problemi che si pongono nell'affrontare l'analisi scientifica dei processi reali, basata sugli schemi e i metodi della matematica - esposti nella loro complessità che non va sottaciuta ma anzi messa in luce il più possibile - ha un valore formativo insostituibile.

N O T E

(1) BOURBAKI N., "L'architecture des mathématiques", in Le Lionnais F.(a cura di), *Les grands courants de la pensée mathématique* , Cahiers du Sud, 1948, p.46-47.

(2) Questo brano è tratto da una conferenza tenuta da Einstein nel 1921 davanti all'Accademia delle Scienze di Berlino e poi pubblicata in varie lingue col titolo "La geometria e l'esperienza". Si veda ad esempio la versione francese in: A. Einstein, *Réflexions sur l'électrodynamique, l'éther, la géométrie et la relativité* , Gauthier-Villars, Paris, 1972.

(3) Op. cit. nella nota (2).

(4) Il brano è tratto dallo scritto "The mathematician" del 1947. Si veda J. von Neumann, *Collected Works* , Pergamon Press, 1961, Vol.1.

(5) La limitazione alla riga ed al compasso è di carattere evidentemente 'tecnico': per lungo tempo lo studio dei problemi geometrici di costruzione con riga e compasso fu richiesto da mestieri come l'agrimensura ed il taglio delle pietre. Uno degli esempi più clamorosi dell'incomprensione del significato storico della limitazione alla riga ed al compasso si trova in un volume di J. Dieudonné (*Algèbre linéaire et géométrie élémentaire* , Hermann, Paris, 1968; trad. it. Feltrinelli, Milano, 1970): Dieudonné afferma che la limitazione degli strumenti alla riga ed al compasso è il "più gigantesco imbroglio dell'insegnamento classico", asserendo trattarsi di un "brutto scherzo" attribuito senza prove convincenti a Platone …

(6) Questo brano è riportato nel volumetto: G. Israel, *Modelli matematici* , Editori Riuniti, 1986, pp.76-80. Faremo nel seguito frequente riferimento a questo libro ed alle citazioni ivi contenute, data l'evidente attinenza del suo soggetto con i temi qui trattati.

(7) La creazione di questa nuova matematica "dinamica" fu descritta con grande efficacia dallo storico della scienza A. Koyré nei suoi *Studi newtoniani* . Alcuni brani delle pagine da lui dedicate a tale tema sono riportati nel volume citato nella nota (6).

(8) Il testo cui ci riferiamo è l'Introduzione alla *Théorie Analytique des Probabilités* di P.S. Laplace del 1812 (la prima versione dell'introduzione risale però al 1795).

(9) Questo tema è trattato con maggiori dettagli in G. Israel, "I meccanici del cervello" , *Prometeo* , Anno 5, N° 18, Giugno 1987, pp.30-45..

(10) Questa tematica, per quanto riguarda l'economia, è ampiamente studiata in: B. Ingrao, G. Israel, *La mano invisibile , L'Equilibrio Economico nella storia della scienza,* Laterza, Bari, 1987.

(11) Laplace è assai esplicito su questo punto e non è certo un caso che le frasi che abbiamo riportato in precedenza compaiano nell'introduzione ad un trattato di teoria delle probabilità.

(12) Su questo punto si veda l'articolo citato nella nota (9).

(13) L'equazione esponenziale e l'equazione logistica forniscono un eccellente materiale didattico per fornire esempi di semplici modelli matematici e per mostrare come uno stesso schema matematico (anche semplicissimo come quello dato dall'equazione esponenziale) possa essere utilizzato per descrivere processi e situazioni diversissimi fra di loro. Si veda il volumetto citato nella nota (6) per applicazioni ed esempi elementarissimi dal punto di vista matematico.

(14) Si veda ancora, al riguardo, il volume citato nella nota (6) e, per una trattazione più ampia e completa: J.M. Smith, *L'ecologia e i suoi modelli* , Biblioteca EST, Mondadori, Milano, 1975.

(15) Si vedano i numerosi lavori (ed un volume del 1973) di R.M. May citati nel volume di J.M. Smith (v. nota (14)).

(16) Una trattazione ampia è contenuta nel volume citato nella nota (10).

(17) E cioé nel senso che, indipendentemente dal suo stato iniziale, il sistema tende a raggiungere uno stato di equilibrio.

(18) J. Fourier, *Théorie Analytique de la Chaleur* , Paris, 1822, p.XXII.

Riassunto: In che modo dobbiamo insegnare e divulgare la matematica nella sua funzione di strumento di descrizione, di analisi e di previsione dei processi reali? Non appena ci poniamo questa domanda, essa ci conduce al problema dell'*immagine* che noi abbiamo - e che dobbiamo trasmettere - della matematica. E questo problema è tanto più importante ed ineludibile se la nostra domanda non è posta in termini astratti, ma fa riferimento ad una realtà concreta e specifica, quella della scuola italiana e, più in generale, dell'ambiente culturale italiano.

La prima osservazione che si impone su questo tema è che l'immagine comune e diffusa della matematica è tuttora inadeguata alla divulgazione e all'insegnamento delle funzioni applicative della matematica di cui si diceva all'inizio. Ciò è dovuto al fatto che sono stati trascurati alcuni temi importanti. Questi temi saranno l'oggetto di questa relazione. In primo luogo, è stata

sottovalutata l'esigenza di superare ogni punto di vista tendente ad affermare che la matematica è essenzialmente distinta e separata da tutte le scienze empiriche. In secondo luogo, è necessario approfondire il tema del ruolo della fisica nella determinazione del quadro dei modelli, dei metodi ed anche delle tecniche matematiche usate nella descrizione dei processi reali. In terzo luogo, occorre evidenziare i limiti e le difficoltà che il predominio del modello fisico comporta nella modellizzazione matematica delle scienze non fisiche. Un discorso a parte compete infine alla discussione del ruolo, dei vantaggi e dei limiti del calcolo numerico nella formulazione e nella verifica delle leggi matematiche dei processi reali (e quindi del ruolo, dei vantaggi e dei limiti dei *computer* , dell'informatica, con tutta la cascata di problemi attualissimi che sono legati a questa tematica).