“Innovazione e tradizione nella Matematica e nel suo insegnamento” - 11.05.09

Numeri e calcolatori

Roberto Ferretti

Dipartimento di Matematica
Universita’ di Roma Tre

- Il matematico e i numeri
- Modellistica matematica, Analisi, Analisi Numerica e calcolatori
- L'approccio costruttivo e la calcolabilitá
- Primo esempio: il teorema di esistenza degli zeri
- Secondo esempio: l'area di una figura complessa
- Conclusioni

Il matematico e i numeri

Ma é vero che il matematico ha a che vedere con calcoli e numeri...?

Il matematico e i numeri

Ma é vero che il matematico ha a che vedere con calcoli e numeri...?

“La sai una cosa? Gran parte dei veri matematici i calcoli non li sa nemmeno fare. Non vogliono sprecare il tempo, e poi ci sono le calcolatrici” (H. M. Enzensberger, *Il mago dei numeri*)

Il matematico e i numeri

Ma é vero che il matematico ha a che vedere con calcoli e numeri...?

“La sai una cosa? Gran parte dei veri matematici i calcoli non li sa nemmeno fare. Non vogliono sprecare il tempo, e poi ci sono le calcolatrici” (H. M. Enzensberger, *Il mago dei numeri*)

“La divisione del conto la fa Roberto, che é matematico” (I miei amici, ogni volta che si va in pizzeria)

• Nell'immaginario collettivo *matematica* e *numeri* sono due concetti inseparabili

• Tuttavia, la matematica si occupa anche (e soprattutto) di strutture e concetti ad un livello di astrazione piú alto

• Il settore della Matematica che maggiormente si occupa di dare un valore numerico alla soluzione di problemi astratti (specie se di origine applicativa) é l'Analisi Numerica

indice

Modellistica matematica, Analisi, Analisi Numerica e calcolatori

Molti processi reali possono essere descritti con modelli matematici, tenendo conto dei meccanismi di causalitá che li regolano.

Modellistica matematica, Analisi, Analisi Numerica e calcolatori

Molti processi reali possono essere descritti con modelli matematici, tenendo conto dei meccanismi di causalitá che li regolano.

- **Modellistica matematica**: formula un modello del processo in questione, in modo da introdurre il numero minimo di meccanismi che consentano di descrivere correttamente il fenomeno

Modellistica matematica, Analisi, Analisi Numerica e calcolatori

Molti processi reali possono essere descritti con modelli matematici, tenendo conto dei meccanismi di causalitá che li regolano.

- **Modellistica matematica**: formula un modello del processo in questione, in modo da introdurre il numero minimo di meccanismi che consentano di descrivere correttamente il fenomeno

- **Analisi**: studia il modello, soprattutto per decidere se il problema matematico ottenuto ammette soluzione unica (buona posizione), e spesso anche per individuare le proprietá qualitative della soluzione

• **Analisi Numerica**: costruisce metodi per approssimare le soluzioni e ne studia le proprietá, soprattutto in termini di convergenza alla soluzione esatta

- **Analisi Numerica**: costruisce metodi per approssimare le soluzioni e ne studia le proprietá, soprattutto in termini di convergenza alla soluzione esatta

- **Calcolatore**: al passo finale della catena, esegue gli algoritmi di approssimazione e calcola le soluzioni approssimate

Nei grandi problemi di calcolo scientifico, la corretta integrazione di tutti questi passi é fondamentale per arrivare ad una risoluzione precisa ed efficiente

Modellizzazione matematica del processo

Studio della buona posizione

$\downarrow\uparrow$

Metodo di approssimazione

Convergenza e stabilitá del metodo

$\downarrow\uparrow$

Implementazione reale del metodo

Una caso tipico di calcolo scientifico é la previsione meteo. In questo problema, si parte dalle Equazioni primitive, un modello di evoluzione dei fluidi soggetti al riscaldamento e alle forze esterne (gravitazione, forza di Coriolis)

– Conservazione della quantità di moto (Navier-Stokes):

$$\frac{Du}{Dt} - fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + F_{rx} \qquad \frac{Dv}{Dt} + fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + F_{ry} \qquad \frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g + F_{rz}$$

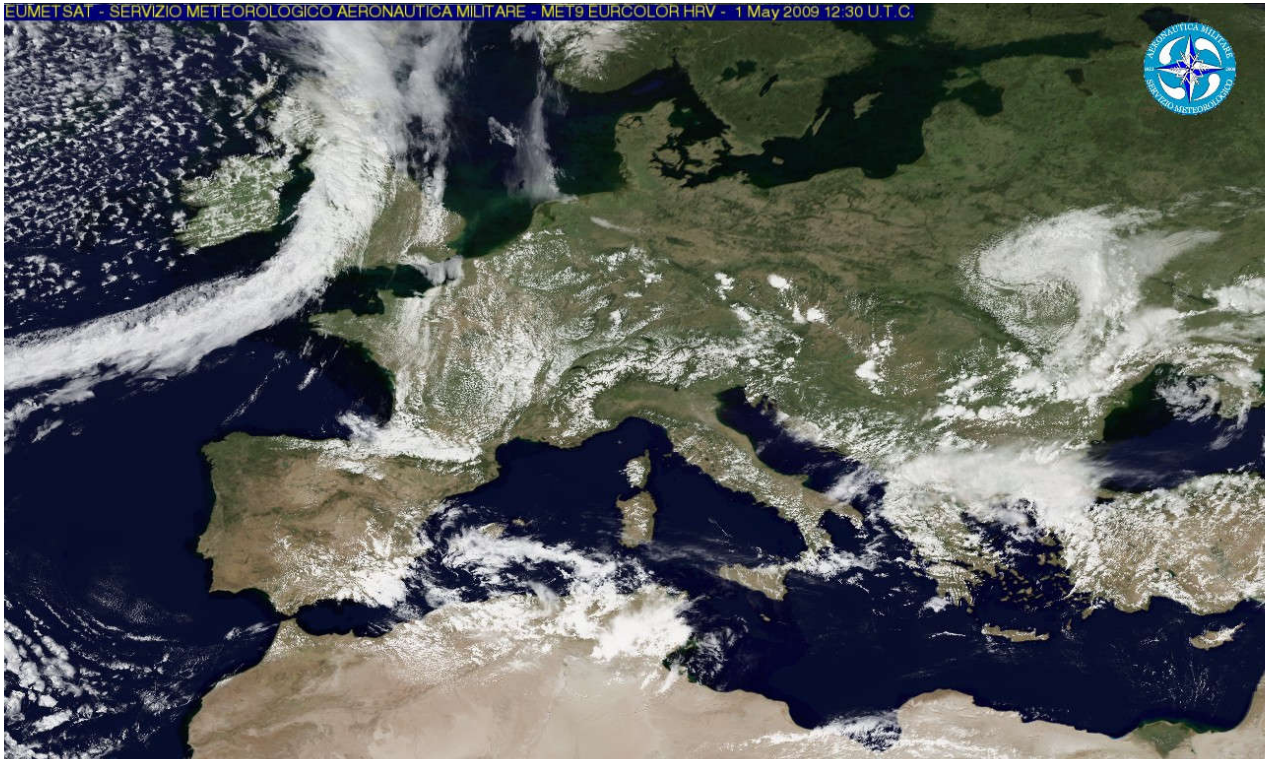
– Continuità:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

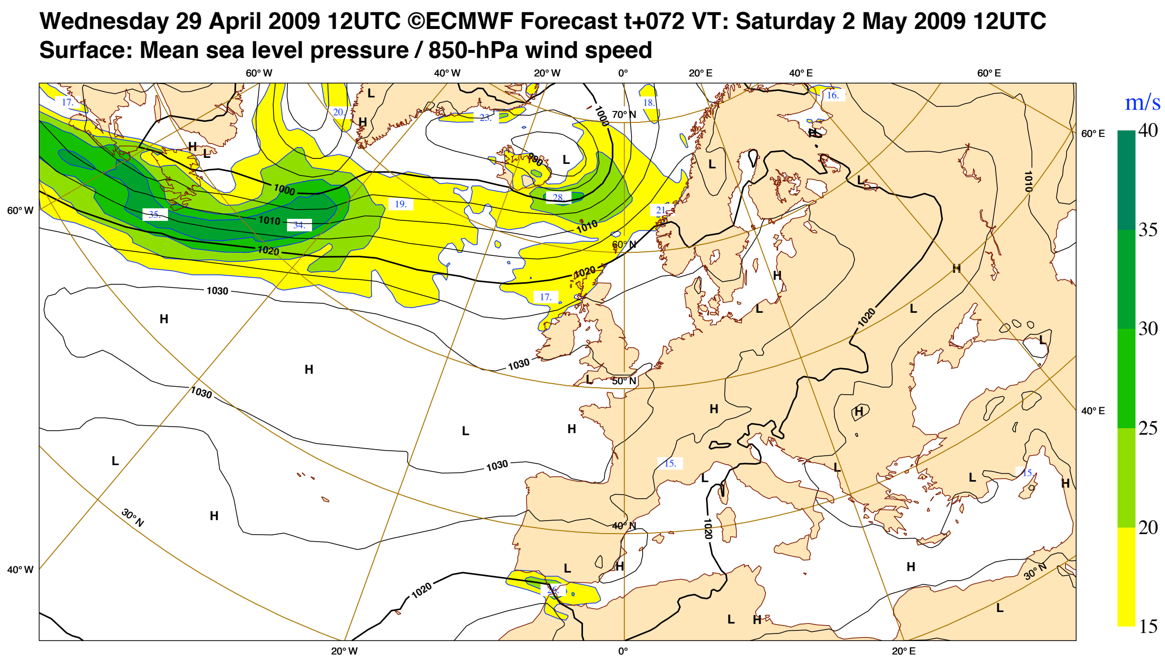
– Conservazione dell'energia:

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{\theta}{c_p T} q$$

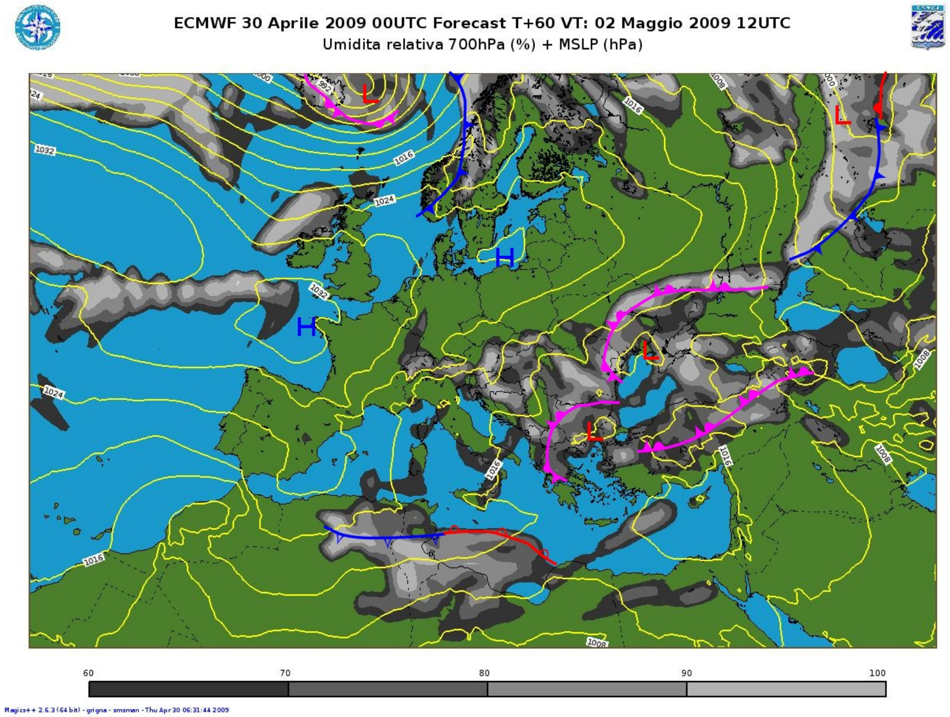
Il modello viene interfacciato con le misure dei dati atmosferici, fornite da una rete capillare di rilevazione (stazioni meteo, satelliti)

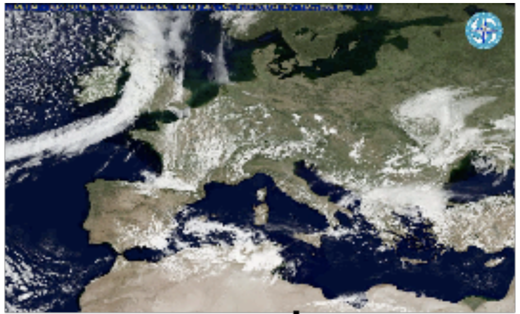


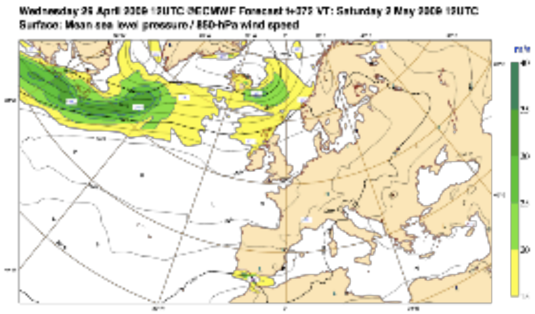
Le equazioni primitive vengono simulate con opportuni metodi numerici, implementati tipicamente su calcolatori di grande potenza (la mole di calcoli da effettuare é enorme)

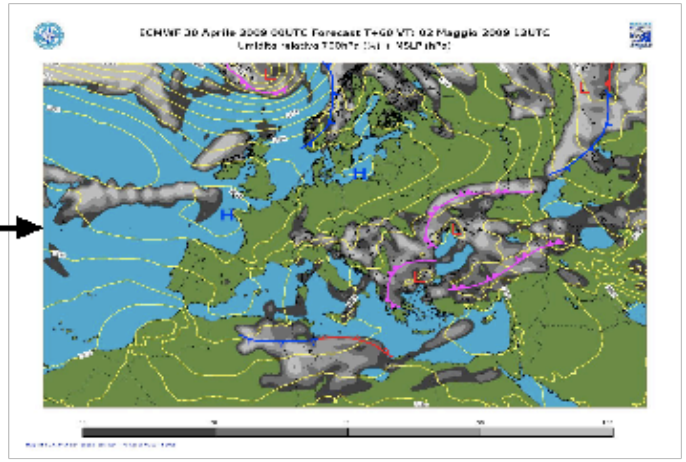


Le grandezze atmosferiche calcolate vengono poi reinterpretate dai meteorologi, che le trasformano in carte del tempo previsto









– Conservazione della quantità di moto (Navier-Stokes):

$$\frac{Du}{Dt} - fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + F_{rx} \qquad \frac{Dv}{Dt} + fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + F_{ry} \qquad \frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g + F_{rz}$$

– Continuità:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

– Conservazione dell'energia:

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{\theta}{c_p T} q$$

L’approccio costruttivo e la calcolabilitá

Giá dall’inizio del 1900 é stato posto il problema di utilizzare in matematica esclusivamente metodi che portino alla possibilitá di calcolare (almeno idealmente) gli enti matematici che vengono definiti.

Tale tendenza va sotto il nome di *costruttivismo*

A livello di logica matematica, uno dei cardini di questa tendenza é quello che per dimostrare l’esistenza di un certo ente matematico occorra dare una procedura per costruirlo, piuttosto che dimostrare che é assurdo che questo ente non esista.

Una dimostrazione costruttiva consiste quindi essenzialmente in un

Algoritmo: insieme finito di istruzioni esplicite, non ambigue, per risolvere un dato problema.

Da questo punto di vista, la matematica costruttiva si occupa di oggetti *calcolabili*.

Infatti, tutte le caratterizzazioni delle funzioni calcolabili portano, nella sostanza, ad identificarle con quelle che si possono calcolare tramite macchine di Von Neumann (computers), ovvero macchine in grado di eseguire algoritmi.

• Nella matematica attuale, l'approccio costruttivo viene ritenuto troppo poco potente, e le necessitá computazionali si ritengono normalmente abbastanza ben risolte dal rapporto tra matematica astratta e matematica numerica

- Nella matematica attuale, l'approccio costruttivo viene ritenuto troppo poco potente, e le necessitá computazionali si ritengono normalmente abbastanza ben risolte dal rapporto tra matematica astratta e matematica numerica

- Dal punto di vista didattico, l'utilizzo di argomenti costruttivi in "matematica pura" resta peró tutto sommato abbastanza limitato e questi due aspetti della matematica vengono insegnati senza metterne in luce tutti i legami

indice

Primo esempio: il teorema di esistenza degli zeri

Un semplice caso in cui la differenza tra l'approccio "esistenziale" e quello "costruttivo" é giá vistosa, é il teorema di esistenza degli zeri, ovvero esistenza di soluzioni dell'equazione

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

Primo esempio: il teorema di esistenza degli zeri

Un semplice caso in cui la differenza tra l'approccio "esistenziale" e quello "costruttivo" é giá vistosa, é il teorema di esistenza degli zeri, ovvero esistenza di soluzioni dell'equazione

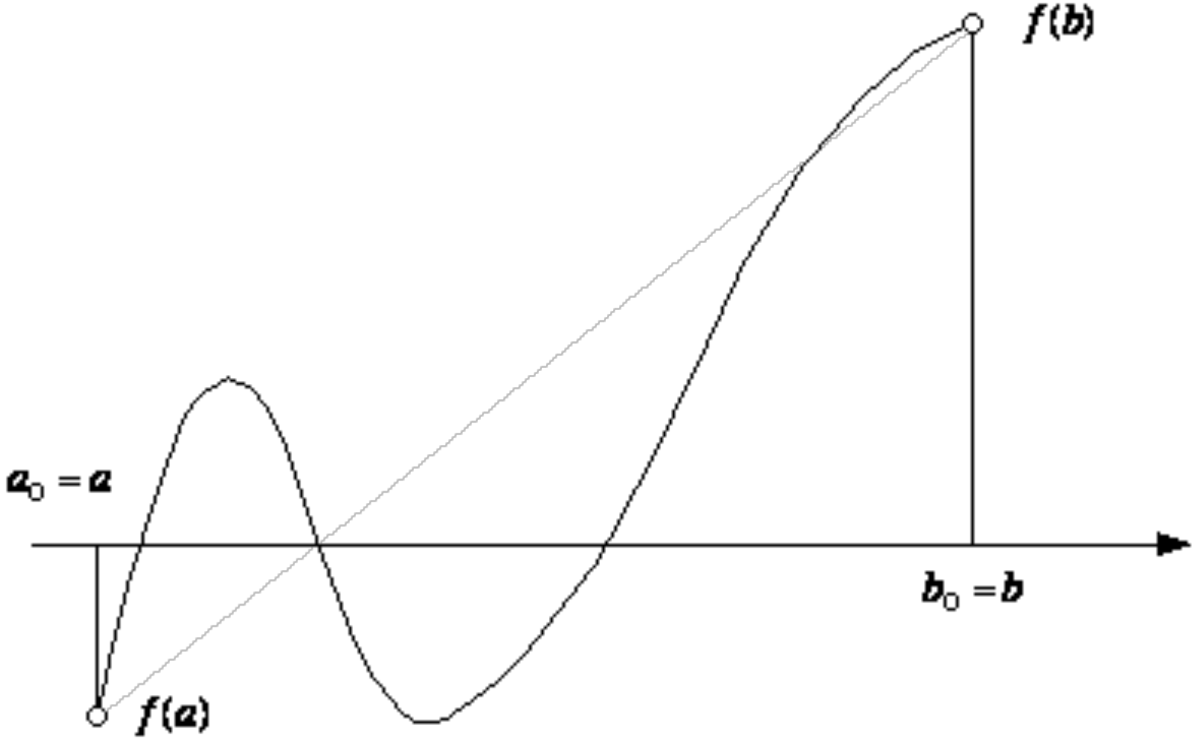
$$f(x) = 0. \tag{2}$$

Teorema: Sotto le ipotesi che, in un certo intervallo $[a, b]$:

- La funzione f sia continua

- $f(a)$ e $f(b)$ abbiano segno diverso

esiste (almeno) una soluzione di (2) in (a, b).



ad esempio supponiamo che $f(a) < 0$, $f(b) > 0$...

Dimostrazione "esistenziale"

- Si definisce l'insieme

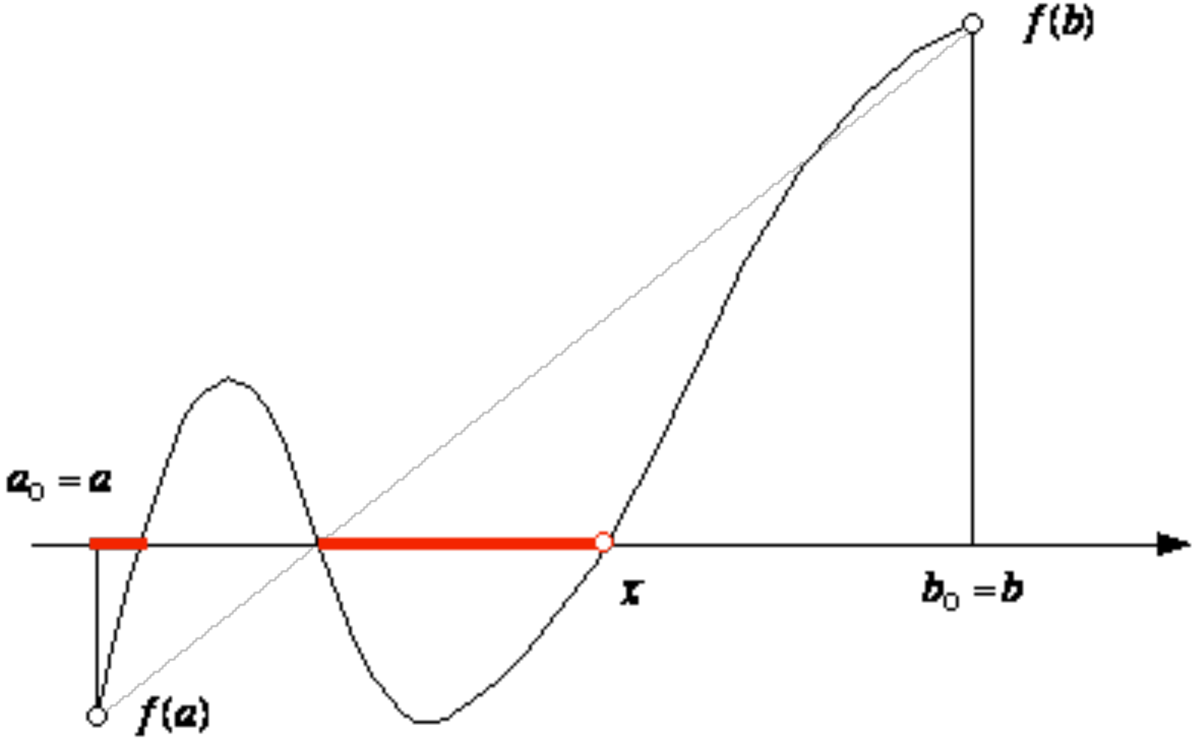
$$A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq 0\}$$

- si definisce il punto

$$\bar{x} = \max A = \sup A$$

e si dimostra che necessariamente $f(\bar{x}) = 0$.

Osservazione: il punto $\bar{x}$ non puó essere calcolato, si puó solo enunciarne l'esistenza in base ad argomenti astratti (esistenza dell'estremo superiore per insiemi limitati)


f(b)
a0 = a
x
b0 = b
f(a)

Dimostrazione “costruttiva”

Si basa sul cosiddetto metodo di bisezione. Si parte dall’intervallo $[a_0, b_0] = [a, b]$ in cui la funzione cambia di segno, si costruisce una successione di intervalli $[a_k, b_k]$ in modo che:

- $b_k - a_k = \frac{1}{2}(b_{k-1} - a_{k-1})$

- la funzione cambi di segno in $[a_k, b_k]$

e si dimostra che la radice é il limite delle successioni a_k e b_k

Osservazione: si tratta di una algoritmo di calcolo.

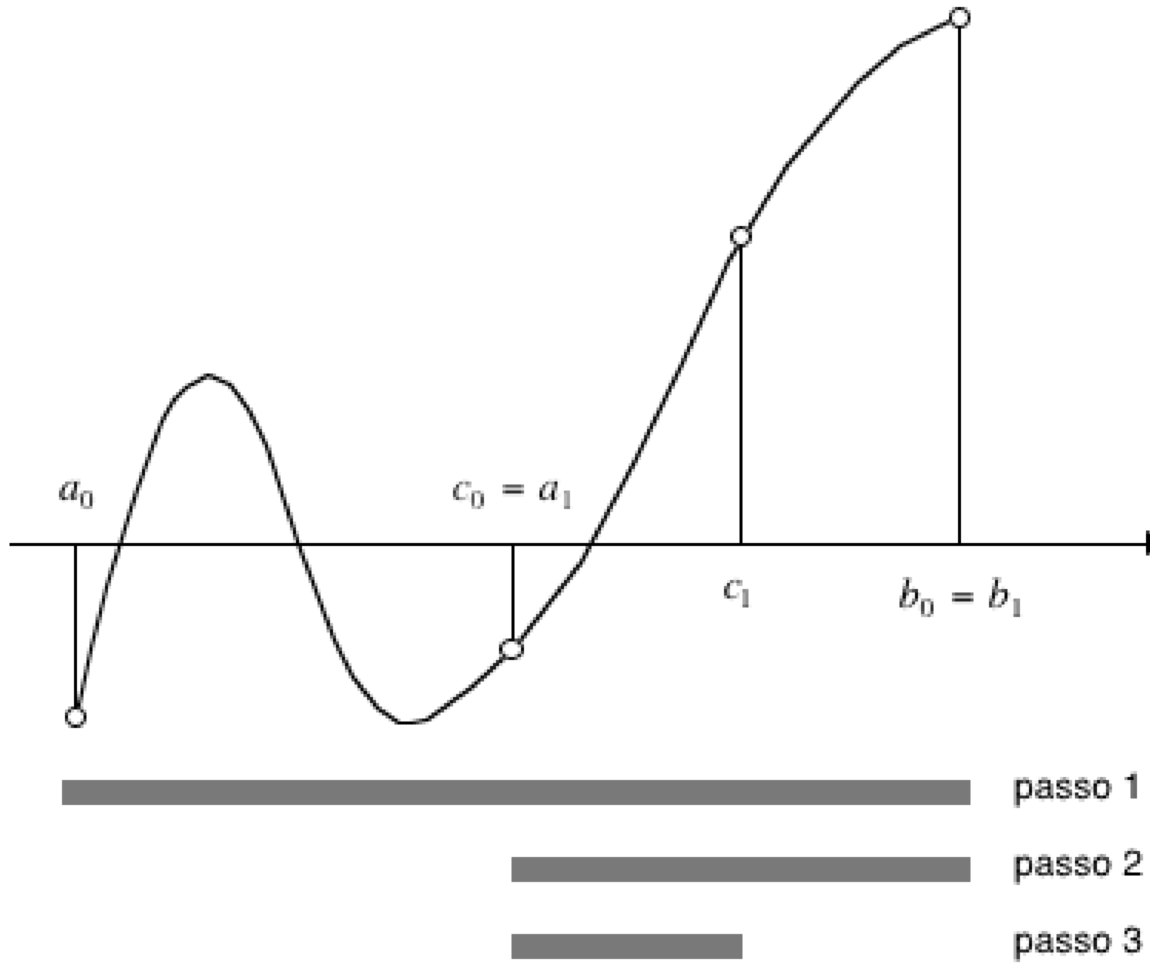
E' dato l'intervallo $[a_0, b_0]$, $k = 0$.

1. Poni $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$

2. Se $f(c_k) = 0$ ho trovato la radice, STOP

3. Se $f(a_k)f(c_k) < 0$, poni $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = c_k$,
incrementa k e vai a 1

4. Se $f(b_k)f(c_k) < 0$, poni $a_{k+1} = c_k$, $b_{k+1} = b_k$,
incrementa k e vai a 1


a_0
$c_0 = a_1$
c_1
$b_0 = b_1$
passo 1
passo 2
passo 3

• Anche se nessuno dei punti a_k e b_k coicidesse con la soluzione $\bar{x}$, ho ottenuto delle successioni che approssimano la radice dal basso e dall'alto.

• Sono in grado di maggiorare l'errore ad ogni iterazione con $b_k - a_k$ (la radice é sicuramente interna a quest'intervallo)

• l'algoritmo che ottengo é implementabile su una macchina calcolatrice (con la sola aggiunta di un test che faccia arrestare il programma quando la precisione é sufficiente)

indice

Secondo esempio: l'area di una figura complessa

Nella geometria elementare le aree che possono essere definite in modo primitivo sono quelle dei rettangoli.

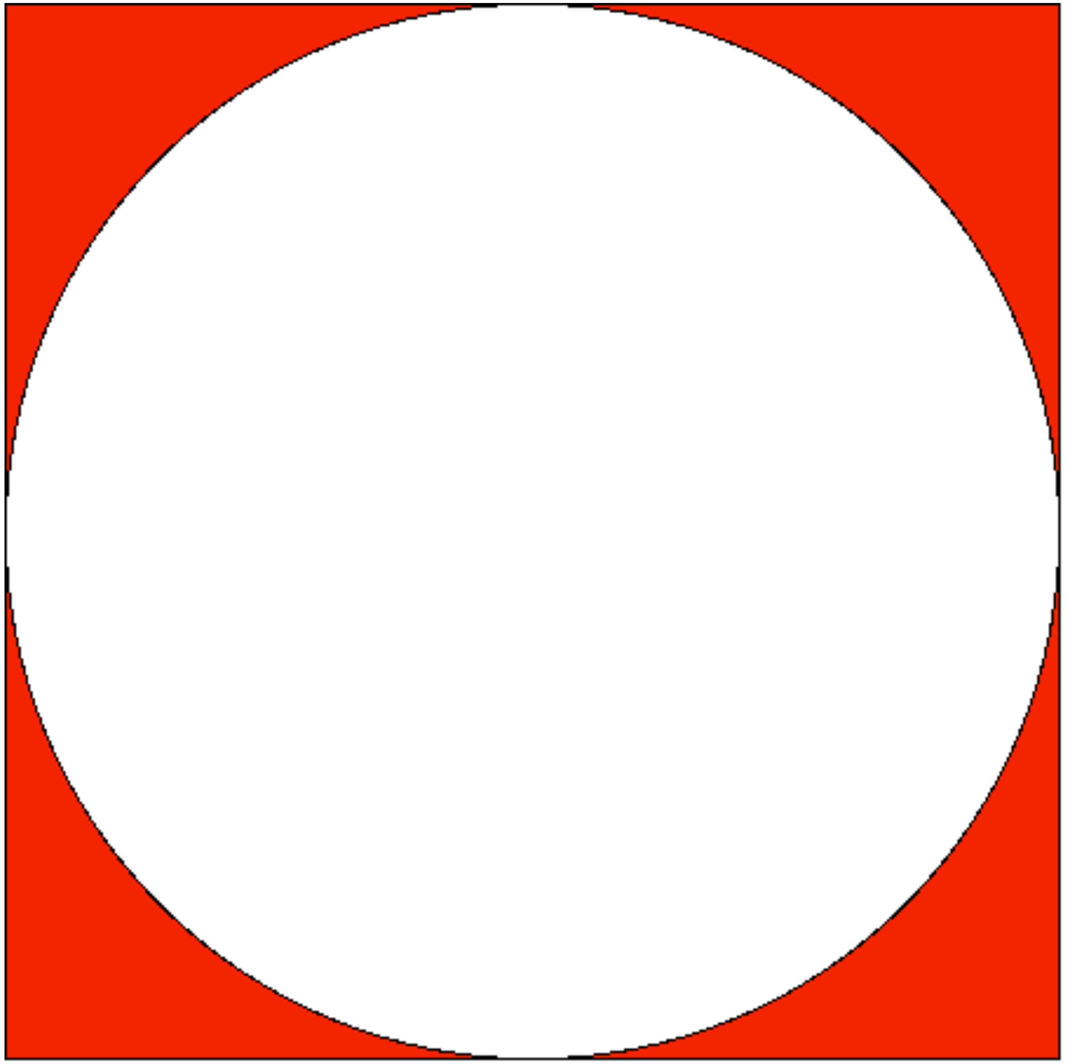
• Le aree dei parallelogrammi, dei triangoli, dei poligoni regolari sono calcolate per divisione, somma, differenza di aree di figure elementari

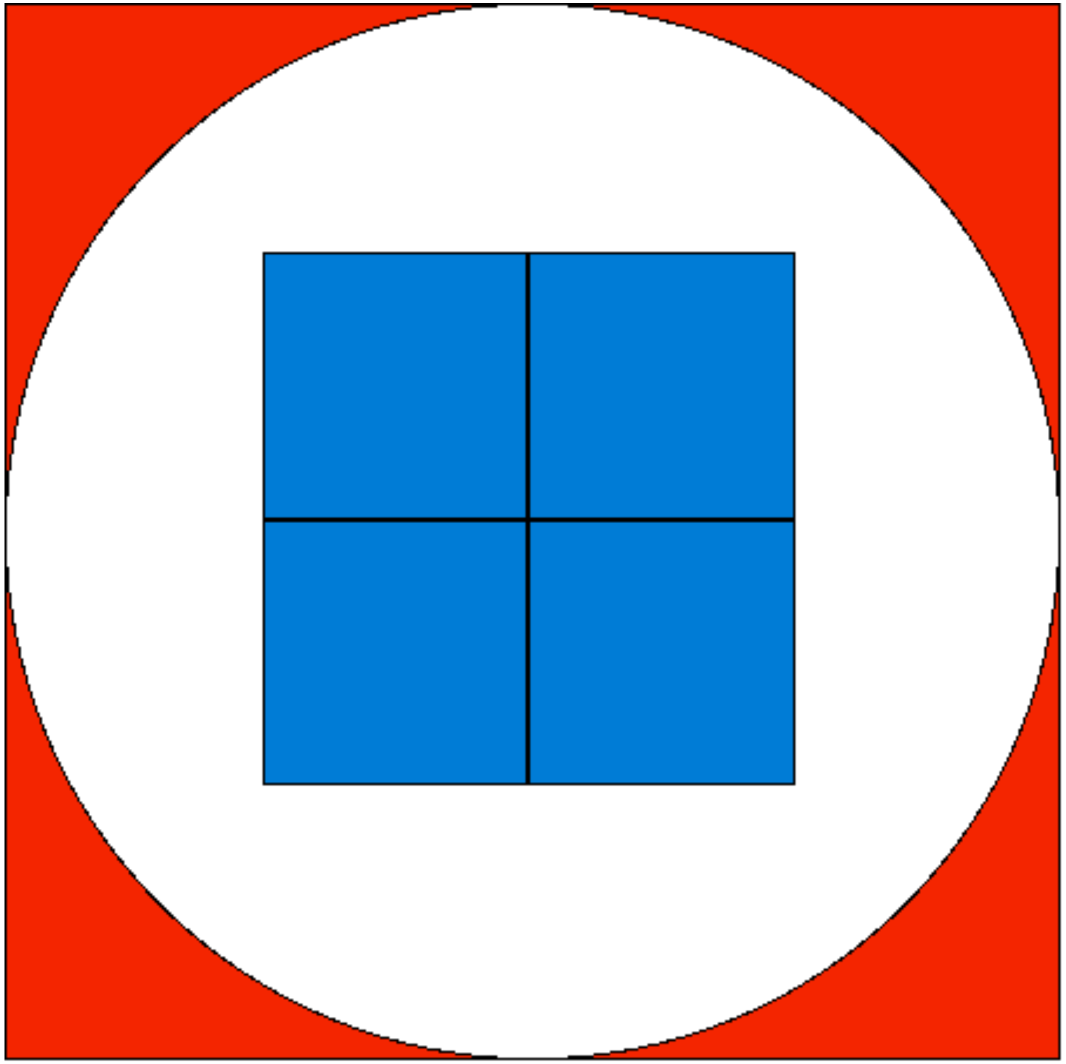
• L'area del cerchio non puó essere ottenuta per operazioni sulle aree di figure elementari, e richiede un passaggio al limite (é l'area di un "poligono regolare con infiniti lati"...) che porta ad identificare l'area con il numero πr^2

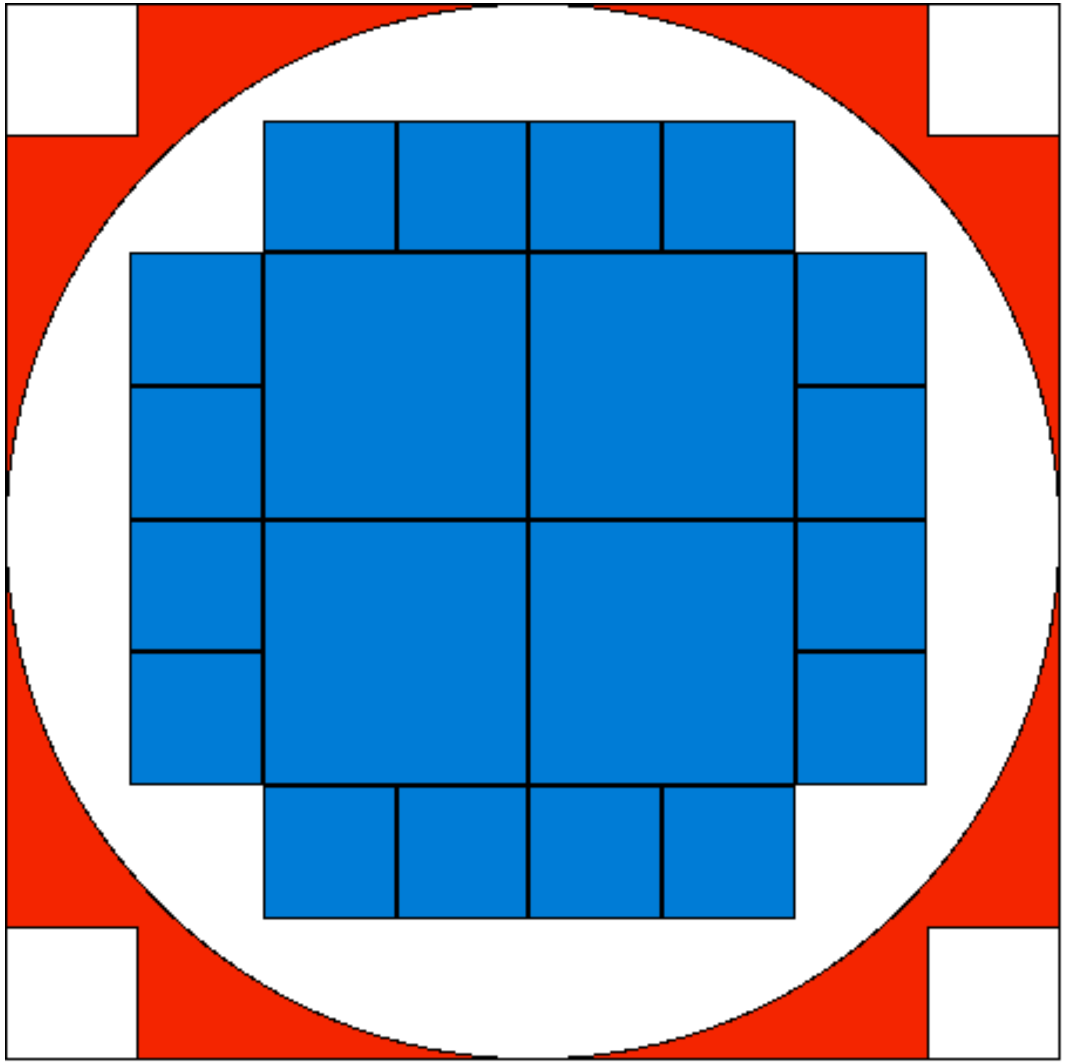
Piú in generale, nella teoria della misura secondo Peano–Jordan, l'area di una figura complessa si definisce tramite la costruzione di due ricoperture della figura (tramite figure elementari, ad esempio), una completamente inclusa al suo interno ed una che la includa.

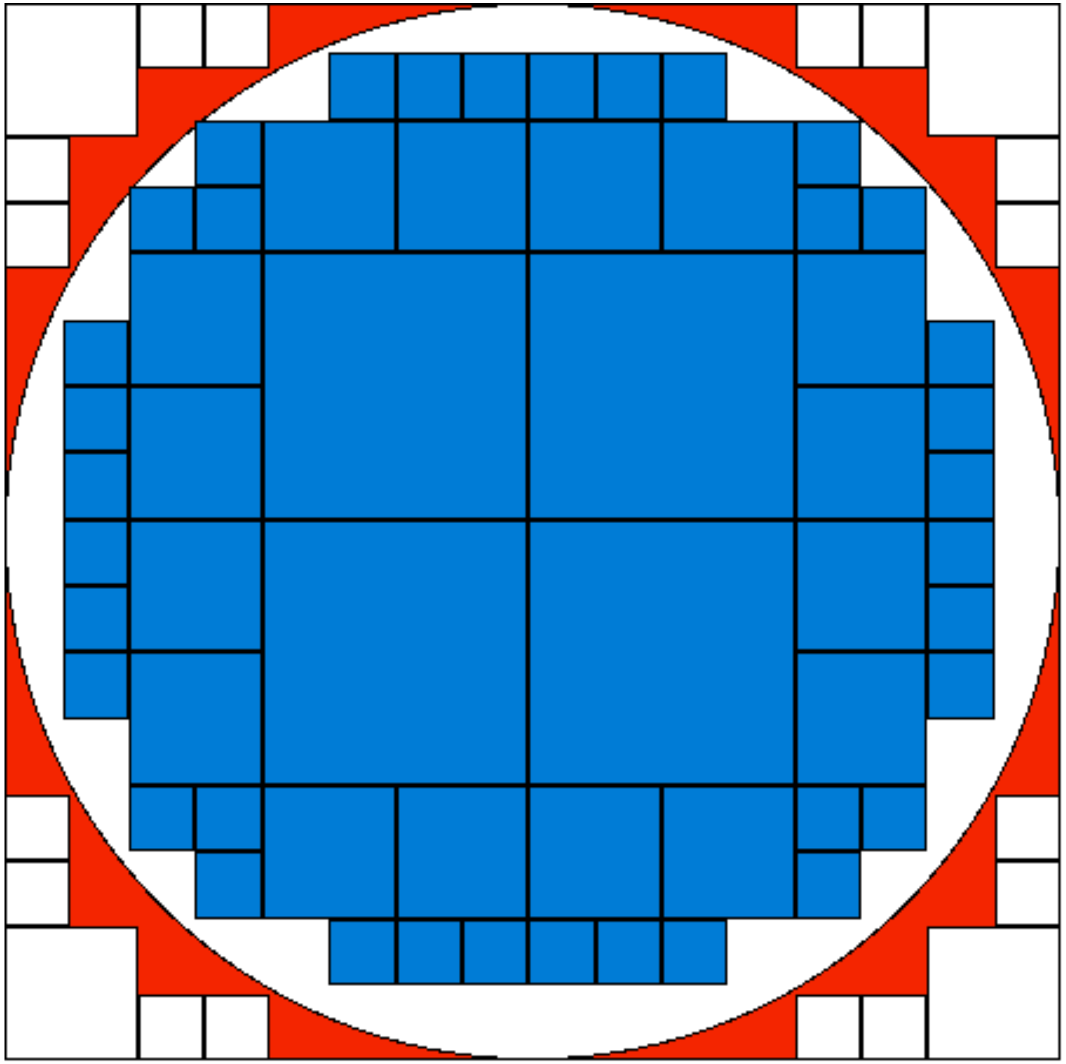
Se le aree delle due ricoperture possono essere rese arbitrariamente vicine, la figura é misurabile. (e la sua area é l'elemento di separazione tra le aree esterne e le aree interne)

Tale procedura é costruttiva.









Questa procedura:

- é implementabile su una macchina calcolatrice

- é applicabile a figure complesse di natura anche piú generale del cerchio

- porta ad individuare l'area del cerchio con un errore massimo dato dalla differenza tra l'area esterna e l'area interna, relative ad una data decomposizione (in pratica, dell'ordine di grandezza del diametro dei quadrati piú piccoli moltiplicato per il perimetro della figura)

Ci si potrebbe peró chiedere perché usare un calcolo approssimato invece del valore esatto πr^2...

Ma cosa intendiamo quando parliamo di π?

$\pi = 3.1415926535$

Ma cosa intendiamo quando parliamo di π?

$\pi = 3.14159265358979323846$

Ma cosa intendiamo quando parliamo di π?

$\pi = 3.14159265358979323846264338327 9$

Ma cosa intendiamo quando parliamo di π?

$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288841971$

Ma cosa intendiamo quando parliamo di π?

$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510...$

Ma cosa intendiamo quando parliamo di π?

$\pi = 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751 0...$

- In realtá ogni volta che cerchiamo l'area di un cerchio dobbiamo necessariamente usare un valore approssimato di π

Ma cosa intendiamo quando parliamo di π?

$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510...$

• In realtá ogni volta che cerchiamo l'area di un cerchio dobbiamo necessariamente usare un valore approssimato di π

• L'area che calcoliamo é quindi sempre approssimata, che si voglia o no (ció é legato alla sua effettiva calcolabilitá, in termini di finitezza della memoria e del numero di operazioni)

indice

Conclusioni

• Al momento attuale, in campo di ricerca matematica astratta si ritiene che la matematica costruttiva non possa essere altrettanto potente di quella tradizionale

Conclusioni

• Al momento attuale, in campo di ricerca matematica astratta si ritiene che la matematica costruttiva non possa essere altrettanto potente di quella tradizionale

• D'altra parte, appare anche verosimile che la matematica numerica aquisterá in futuro una importanza sempre maggiore

Conclusioni

• Al momento attuale, in campo di ricerca matematica astratta si ritiene che la matematica costruttiva non possa essere altrettanto potente di quella tradizionale

• D'altra parte, appare anche verosimile che la matematica numerica aquisterá in futuro una importanza sempre maggiore

• La riluttanza ad usare argomenti costruttivi ha peró generato una innaturale parcellizzazione che non utilizza appieno la forza dell'approccio algoritmico–computazionale, specialmente sul piano didattico

indice

Grazie per l'attenzione...!