



**Relazione Finale in
Matematica e didattica della matematica**

LA DIVISIONE E IL SENSO DEL NUMERO NEI BAMBINI BASI MATEMATICHE E DIBATTITO ATTUALE

**Relazione di
Emanuela Spagnoletti Zeuli**

**Relatore: Prof.ssa
Ana Millán Gasca**

**Supervisore: Dott.ssa
Luigia Acciaroli**

A.A. 2008 – 2009

**Scuola I.C. Ennio Quirino Visconti (Roma)
Classe IIIA**

Destinatari



Scuola: Ennio Quirino Visconti
(centro storico di Roma, Pantheon)

Classe: III A con 22 bambini

(nessun bambino straniero,
nessun bambino con disabilità)



Scuola: Ennio Quirino Visconti - Classe: IV A
(Lungotevere della Farnesina c/o G. Tavani Arquati)



L'aritmetica nella scuola primaria



Rafforzare l'intimità dei bambini con i numeri

Rafforzare la conoscenza del sistema di numerazione decimale e il significato dei numeri in base 10

Stimolare nel bambino la ricerca di soluzioni e strategie di soluzione attraverso la proposta di problemi stimolanti

Stimolare un atteggiamento positivo nei bambini rispetto alla matematica

Proporre molteplicità di esperienze in riferimento alle abilità di calcolo orale e scritto

Muoversi agevolmente tra concreto e astratto usando gli strumenti del pensiero matematico

La divisione: ipotesi didattica



Se si organizza
l'insegnamento della
divisione in modo tempestivo

e complessivo

(prima della IV
elementare)

(problemi,
operazioni in riga e
colonna,
riflessioni sulle
frazioni...)

**migliora l'apprendimento
da parte dei bambini
con conseguenze positive
anche per gli apprendimenti futuri**

Laurent Lafforgue:

La divisione, crocevia della matematica nella scuola primaria

- **Rigore** nell'insegnamento e nell'apprendimento
- **Progressività** come creazione di nessi logici
- **Allenamento costante**: importanza degli esercizi

Per quanto riguarda i principi generali per l'apprendimento del calcolo, la familiarità con i numeri si consegue attraverso:

- ✓ **l'acquisizione di automatismi**
- ✓ **la diversificazione di situazioni**
- ✓ **la molteplicità di esempi di applicazione**
- ✓ **la diversificazione degli approcci**
- ✓ **la costituzione di una rete di nessi logici**

Lafforgue L., Le calcule à l'école primaire, articolo reperibile sul sito:
<http://www.ihes.fr/~lafforgue/textes/CalculEcolePrimaireLL.pdf>

Il lavoro matematico sulla divisione a scuola



1. Capire il rapporto moltiplicativo tra numeri espresso tramite la relazione d'ordine "essere multiplo"

2. Eseguire semplici divisioni mentalmente

3. Eseguire divisioni per tentativi

4. Eseguire l'algoritmo in colonna della divisione con piena consapevolezza

5. Rappresentare un numero rispetto alla divisibilità per un altro (rappresentazione per decomposizione: $D = d \cdot q + r$)

6. Acquisire il concetto della frazione come operatore

7. Comprendere e risolvere i problemi stimolanti con la divisione

Il progetto



Svolto dal 24 aprile al 4 novembre 2009
(a cavallo delle classi III e IV)

26 sessioni di 2-4 ore

Primo incontro

Capire il rapporto
moltiplicativo tra numeri
espresso tramite la relazione
d'ordine "essere multiplo"
Eseguire l'algoritmo in colonna
della divisione avendo piena
consapevolezza

Quarto incontro

Comprendere e risolvere problemi
stimolanti con la divisione
Acquisire il concetto della frazione
come operatore

Quinto incontro

Eseguire semplici divisioni
mentalmente
Rappresentazione di un numero
rispetto alla divisibilità per un
altro
Frazione come operatore

Primo incontro

Capire il rapporto moltiplicativo tra numeri espresso tramite la relazione d'ordine "essere multiplo"

Tavola pitagorica,
regoli colorati

1	2	3	4	5	6				
2	4	6	8	10	12				
3	6	9	12	15	18				
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100



Gioco
distribuzione di
carte

Divisione in
gruppi



Quarto incontro

Lavorare per problemi con la divisione

La mamma vuole distribuire 14 biscotti tra i suoi 4 figli.

Come può fare?

Risoluzione di problemi abbinato al lavoro di gruppo (4 maggio 2009)

Dati
14 = biscotti che la mamma vuole distribuire
4 = i figli a cui dare distribuire i biscotti

$$\begin{array}{r} 14 \\ 2 \overline{) 3} \\ \underline{6} \\ 8 \\ \underline{6} \\ 2 \end{array}$$

Risposta
la mamma può dare 3 biscotti e mezzo ad ogni figlio.

$$\begin{array}{r} 3+ \\ 3+ \\ 3+ \\ 3+ \\ \underline{2} \\ 14 \end{array}$$

2) Se ne mangiano 3^o figli e 2 la mamma.

$$\begin{array}{r} 2+ \\ 2+ \\ 2+ \\ 2+ \\ 3+ \\ 3= \\ \underline{14} \end{array}$$

3) 1 figlio se ne mangiano 2 per 1 e 3 il padre e 3 le madri.

$$\begin{array}{r} 3+ \\ 3+ \\ 3+ \\ 3+ \\ \underline{2} \\ 14 \end{array}$$

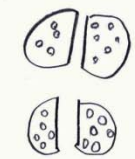
4) Un figlio è malato e non può mangiare i biscotti e quindi se li mangiano i fratelli e 1 la madre e 1 il padre

$$\begin{array}{r} 3+ \\ 3+ \\ 3+ \\ 3+ \\ \underline{2} \\ 14 \end{array}$$

14 = biscotti
4 = figli
Come può fare?

$$\begin{array}{r} 14 \\ 2 \overline{) 3} \\ \underline{6} \\ 8 \\ \underline{6} \\ 2 \end{array}$$

1) la mamma da 14 biscotti: ad ogni bambino e i due biscotti rimasti li divide e ne da mezzo per uno

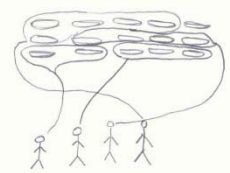


SITUAZIONE PROBLEMATICA

La mamma vuole distribuire 14 biscotti tra i suoi 4 figli. Come può fare?

$$\begin{array}{r} 14 \\ 2 \overline{) 3} \\ \underline{6} \\ 8 \\ \underline{6} \\ 2 \end{array}$$

1) può fare che al più piccolo ne prende 2 il più grande ne prende 3 ^o ~~l'altro~~ l'altro un po' più grande ne prende 4 e il più grande di tutti ne prende 5



2) la mamma da 5 biscotti ai due fratelli più grandi e 2 ai due fratelli più piccoli

3) la mamma da ai fratelli più grandi 7 biscotti: perché i due fratelli più piccoli non li mangiano

Ad esempio:

4

1

3

8

6



2

Come ottenere la cifra 2 utilizzando il maggior numero di carte possibili?

Chi riesce a usare le 4 operazioni è ancora più bravo!

Attenzione: non si possono fare calcoli scritti, solo mentali!

Alcune possibili soluzioni:

$$8 - 1 - 3 + 4 - 6$$

$$6 \times 4 : 3 \times 8 + 1$$

$$8 \times 3 : 6 : 4 + 1$$

$$(8 - 6 + 4) : 3 \times 1$$

Eseguire semplici divisioni mentalmente

Prova di verifica (2 novembre 2009)

Obiettivo 1:

1) Capire il rapporto moltiplicativo tra numeri espresso tramite la relazione d'ordine "essere multiplo"

- Conoscere le tabelline
- Conoscere e riconoscere i rapporti tra numeri in termini di multipli e divisori

➤ Scrivi 3 multipli per ciascuno di questi numeri:

6 24 30 18
 9 27 45 63
 7 35 14 49

➤ Indica i divisori del numero 8: 1, 2, 4, 8

➤ Quanti sono? 4

➤ Quanti sono invece i multipli di 8? infiniti

➤ Per quali due numeri è sempre divisibile un numero? 1 e se stesso

Obiettivo 2:

2) Eseguire semplici divisioni mentalmente

➤ Esegui le seguenti divisioni in riga:

35:7= 5 48:8= 6 54:6= 9 24:3= 8

Obiettivo 3:

3) Eseguire divisioni per tentativi

- Tramite moltiplicazione

➤ Completa le seguenti operazioni:

9 x 7 = 63 6 x 6 = 36 8 x 9 = 72 3 x 8 = 24 8 x 5 = 40

Obiettivo 1:

1) Capire il rapporto moltiplicativo tra numeri espresso tramite la relazione d'ordine "essere multiplo"

- Conoscere le tabelline
- Conoscere e riconoscere i rapporti tra numeri in termini di multipli e divisori

➤ Scrivi 3 multipli per ciascuno di questi numeri:

6 12 18 24
 9 18 27 36
 7 14 21 28

➤ Indica i divisori del numero 8: 1, 2, 4, 8

➤ Quanti sono? 4

➤ Quanti sono invece i multipli di 8? infiniti

➤ Per quali due numeri è sempre divisibile un numero? per il numero stesso e per 1

Obiettivo 2:

2) Eseguire semplici divisioni mentalmente

➤ Esegui le seguenti divisioni in riga:

35:7= 5 48:8= 6 54:6= 9 24:3= 8

Obiettivo 3:

3) Eseguire divisioni per tentativi

- Tramite moltiplicazione

➤ Completa le seguenti operazioni:

2 x 7 = 63 6 x 6 = 36 8 x 9 = 72 5 x 8 = 24 8 x 5 = 40

Eseguire divisioni per tentativi

“Se distribuiamo 80 matite colorate a 16 bambini, quante matite capitano a ciascun bambino?” (9 giugno 2009)

“I bambini sono stati molto rapidi (15 minuti) e corretti nella risoluzione del problema, addizionando il numero 16 fino a raggiungere la cifra 80. Poiché dalla correzione ho visto che a nessuno di loro era venuto in mente la possibilità di usare la moltiplicazione, ho mostrato alla lavagna quale poteva essere un calcolo alternativo alla loro addizione, spiegando che in alcuni casi la moltiplicazione può essere un calcolo mentale più rapido e semplice dell’addizione.

[...] Così ho chiesto a Barbara quanto faceva 16×10 e subito lei ha risposto 160. Ho fatto notare ai bambini che 160 pennarelli erano troppi rispetto a quelli a disposizione e subito Carlo ha esclamato che erano il doppio. Così ho preso spunto dal suo intervento per cercare di farli ragionare sul fatto che se 80 era la metà di 160, bastava considerare la metà dei giri che avevamo considerato inizialmente, cioè 5.

Il risultato di questo problema è stata accolta da un coro di “è vero!”

Eseguire divisioni per tentativi

Ho dato a ogni bambino una piccola tabella chiedendo di tagliarla in 2 parti nel più breve tempo possibile in modo che i numeri contenuti nelle due parti, sommati tra loro, dessero lo stesso risultato.

30	20	10	20
10	5	25	10
25	15	20	10

(9 giugno 2009)

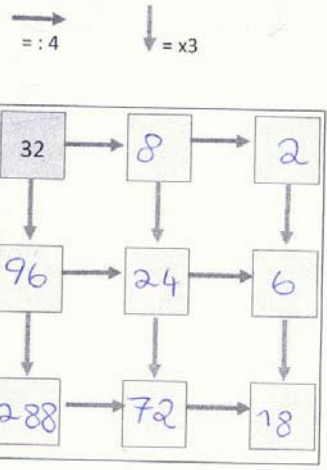
Eseguire l'algoritmo in colonna della divisione avendo piena consapevolezza

Divisioni e rete di calcolo (8 maggio 2009)

Risolvere le seguenti divisioni con il calcolo in colonna (sul retro del foglio) indicando il resto come segue:

- Es. $354:8 = 44$
- $2793:6 = 465$
- $7841:5 = 1568$
- $1603:7 = 229$
- $9830:4 = 2457$
- $8237:9 = 915$
- $5917:2 = 2958$
- $2755:3 = 918$

Risolvere la seguente "Rete di calcolo"



Spazio per i calcoli

$$\begin{array}{r} 32 \overline{) 320} \\ \underline{0} \\ 00 \end{array} \quad \begin{array}{r} 32 \times \\ \underline{3} \\ 96 \end{array} \quad \begin{array}{r} 96 \overline{) 960} \\ \underline{00} \\ 00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 96 \times \\ \underline{3} \\ 288 \end{array} \quad \begin{array}{r} 24 \times \\ \underline{3} \\ 72 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2793 \overline{) 1603} \\ \underline{39} \\ 33 \\ \underline{03} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7841 \overline{) 7841} \\ \underline{28} \\ 34 \\ \underline{47} \\ 07 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1603 \overline{) 1603} \\ \underline{20} \\ 63 \\ \underline{00} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9830 \overline{) 9830} \\ \underline{18} \\ 33 \\ \underline{30} \\ 02 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8237 \overline{) 8237} \\ \underline{13} \\ 47 \\ \underline{02} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5917 \overline{) 5917} \\ \underline{19} \\ 11 \\ \underline{17} \\ 01 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2755 \overline{) 2755} \\ \underline{05} \\ 25 \\ \underline{07} \end{array}$$

Rappresentare un numero rispetto alla divisibilità per un altro (rappresentazione per decomposizione: $D = d \cdot q + r$)

Obiettivo 4:

4) Saper eseguire l'algoritmo in colonna della divisione avendo piena consapevolezza del principio posizionale

➤ Esegui le seguenti divisioni in colonna:

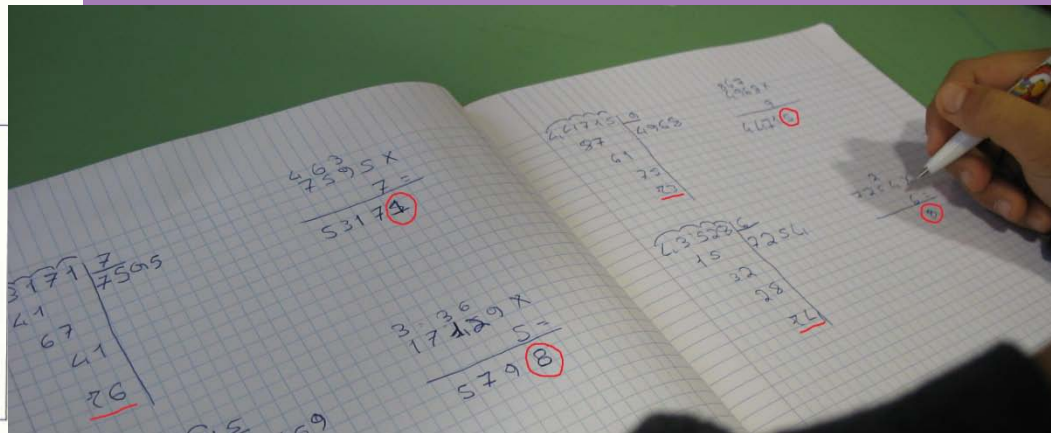
1.436: 7 = 205.....

$$\begin{array}{r} 143\bar{2} \\ 7 \overline{) 205} \\ \underline{14} \\ 60 \\ \underline{56} \\ 4 \end{array}$$

3.576: 6 = 596.....

$$\begin{array}{r} 357\bar{6} \\ 6 \overline{) 596} \\ \underline{36} \\ 23 \\ \underline{18} \\ 50 \\ \underline{48} \\ 20 \end{array}$$

7.054: 3 = 2351.....

$$\begin{array}{r} 705\bar{4} \\ 3 \overline{) 2354} \\ \underline{6} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 15 \\ \underline{15} \\ 04 \\ \underline{3} \\ 1 \end{array}$$


Obiettivo 5:

5) Rappresentazione di un numero rispetto alla divisibilità per un altro (rappresentazione per decomposizione: $D = d \cdot q + r$)

➤ Esegui la prova delle divisioni precedenti riscrivendo in riga il risultato come nell'esempio:

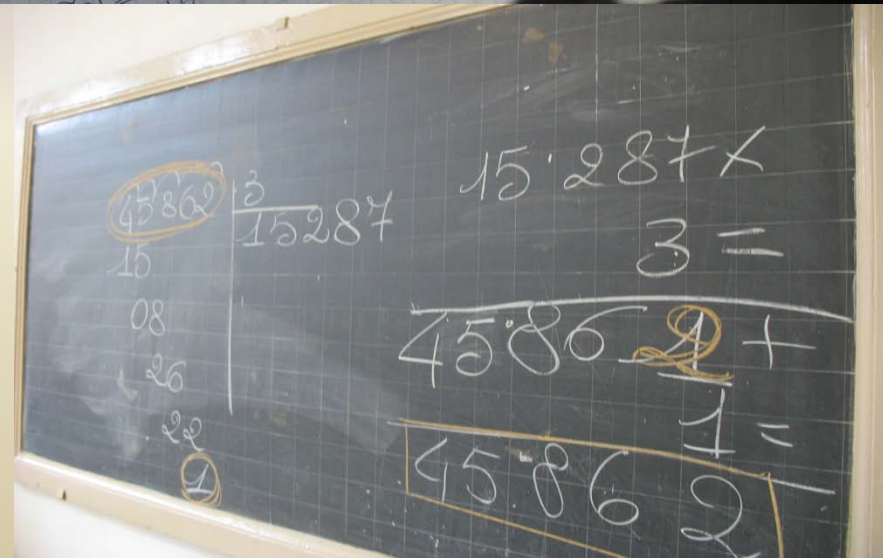
1.436 = 205 x 7 + 1

$$\begin{array}{r} 205 \times \\ 7 = \\ \hline 1435 + \\ \hline 1436 \end{array}$$

3.576 = 596 x 6 + 0

$$\begin{array}{r} 596 \times \\ 6 = \\ \hline 3576 + \\ \hline 3576 \end{array}$$

7.054 = 2351 x 3 + 1

$$\begin{array}{r} 2351 \times \\ 3 = \\ \hline + 053 + \\ \hline 7054 \end{array}$$


Acquisire il concetto della frazione come operatore

Roma, 4 Maggio 2009
FRAZIONI

$\frac{3}{7}$ → numeratore
 $\frac{3}{7}$ → denominatore
tre settimi



Prendo l'intero, lo divido in 7 parti uguali e ne prendo 3.

$\frac{1}{3}$ → numeratore
 $\frac{1}{3}$ → denominatore
un terzo



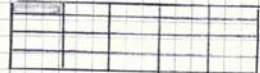


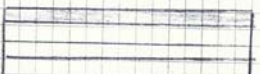


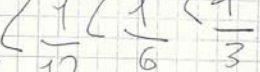
Prendo l'intero, lo divido in 3 parti uguali e ne prendo 1.

$\frac{4}{6}$ → numeratore
 $\frac{4}{6}$ → denominatore
quattro sesti



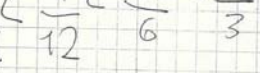



Prendo l'intero, lo divido in 6 parti uguali e ne prendo 4.

Introduzione frazioni (4 e 12 maggio 2009)

 $\frac{1}{20}$
 $\frac{1}{10}$
 $\frac{1}{5}$
 $\frac{1}{4}$
 $\frac{1}{3}$
 $\frac{1}{2}$
 $\frac{1}{1}$

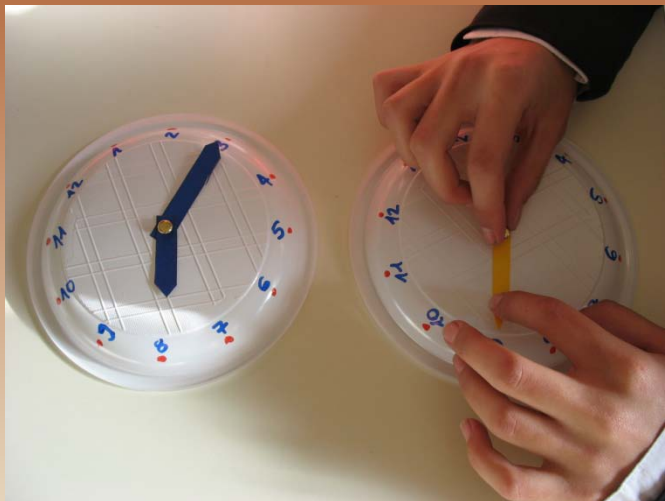
$\frac{1}{20} < \frac{1}{10} < \frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1}$

$\frac{1}{20} < \frac{1}{10}$

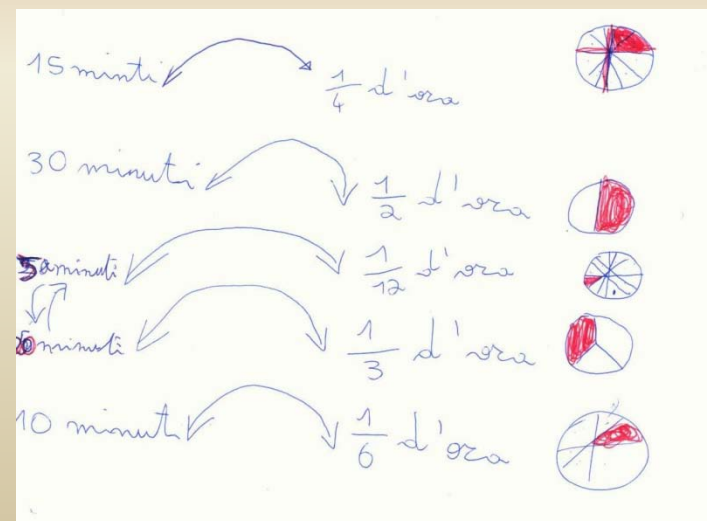
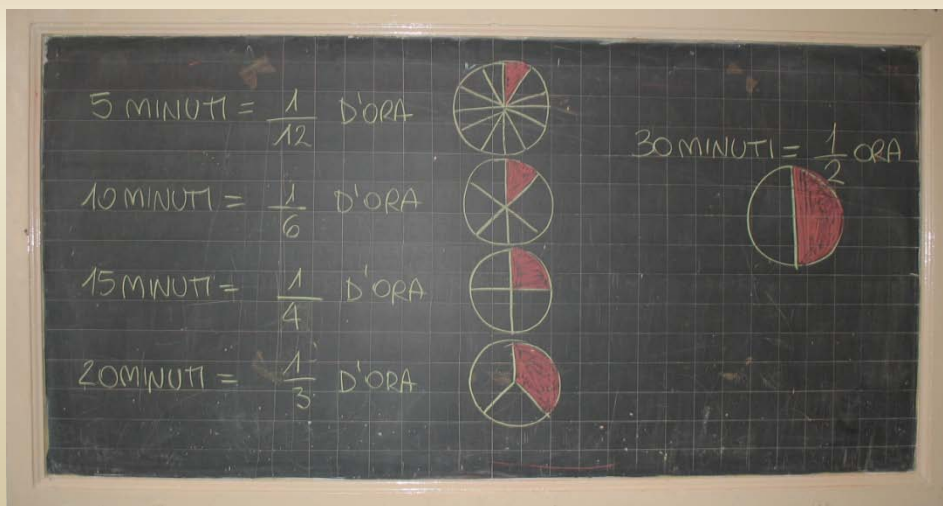
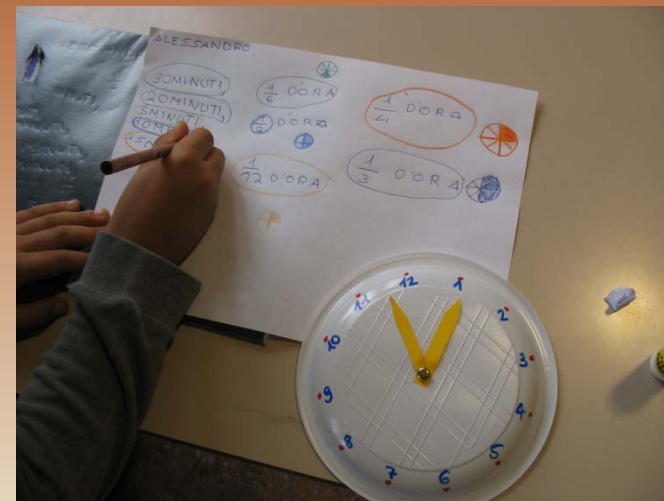
 $\frac{1}{24}$
 $\frac{1}{12}$
 $\frac{1}{6}$
 $\frac{1}{3}$

$\frac{1}{24} < \frac{1}{12} < \frac{1}{6} < \frac{1}{3}$

Acquisire il concetto della frazione come operatore



Costruzione
dell'orologio
(21 ottobre 2009)



Acquisire il concetto della frazione come operatore

Prova di verifica (2 novembre 2009)

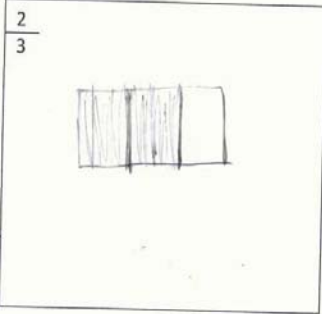
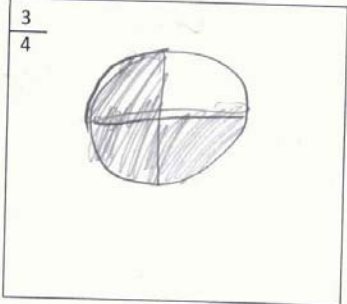
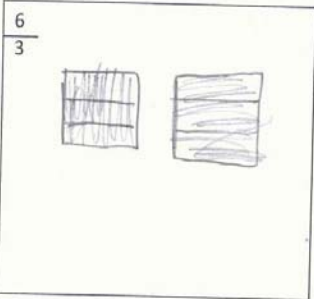
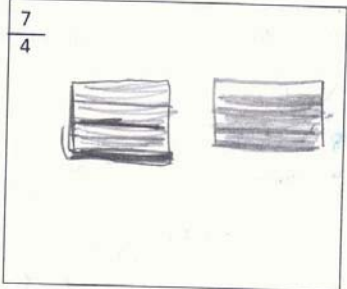
Obiettivo 6:
6) Concetto della frazione come operatore

- Significato dei concetti legati ad unità frazionarie (un terzo, un quarto, ecc.)

➤ Inserisci il segno maggiore o minore tra le seguenti unità frazionarie

$\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ $\frac{1}{5} < \frac{1}{2}$ $\frac{1}{9} > \frac{1}{24}$ $\frac{1}{6} > \frac{1}{12}$ $\frac{1}{10} < \frac{1}{8}$

➤ Rappresenta graficamente le seguenti frazioni:

$\frac{2}{3}$ 	$\frac{3}{4}$ 
$\frac{6}{3}$ 	$\frac{7}{4}$ 

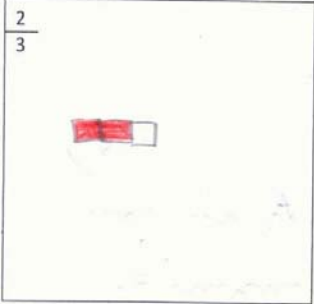
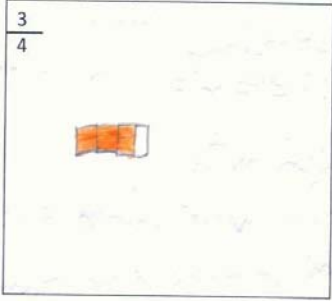
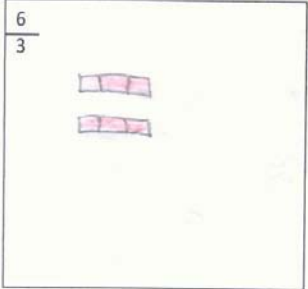
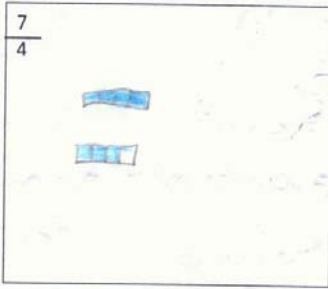
Obiettivo 6:
6) Concetto della frazione come operatore

- Significato dei concetti legati ad unità frazionarie (un terzo, un quarto, ecc.)

➤ Inserisci il segno maggiore o minore tra le seguenti unità frazionarie

$\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ $\frac{1}{5} < \frac{1}{2}$ $\frac{1}{9} > \frac{1}{24}$ $\frac{1}{6} > \frac{1}{12}$ $\frac{1}{10} < \frac{1}{8}$

➤ Rappresenta graficamente le seguenti frazioni:

$\frac{2}{3}$ 	$\frac{3}{4}$ 
$\frac{6}{3}$ 	$\frac{7}{4}$ 

La divisione attraverso i problemi

Risoluzione di problemi abbinato al lavoro di gruppo (8 maggio 2009)

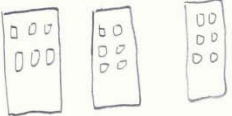
Mario ha 20 carte e vuole inserirle nel suo album. Ogni pagina può contenere 6 carte. Quante pagine utilizzerà per disporre tutte le sue carte?

“Per la restituzione, ho voluto mettere in atto la simulazione della situazione problematica proposta, attaccando alla lavagna dei fogli con disegnati gli spazi dei 6 riquadri...”

Dati
20 = carte di Mario
6 = carte in ogni pagina
? quante pagine utilizzerà Mario per disporre le sue carte

Indicazione
 $20 : 6 = 3 \text{ r } 2$

Risoluzione



Calcolo
$$\begin{array}{r} 20 : 6 \\ \underline{18} \\ 2 \end{array}$$

Risposta
Mario usa 3 pagine per riempire l'album e gliene restano 2

“Devo poi ammettere che 6 coppie di bambini hanno risposto al problema indicando la necessità di “3 pagine e 2 foderine” e questa, da un punto di vista logico e pratico non è una risposta errata...”

La divisione attraverso i problemi

Risoluzione di problemi abbinato al lavoro di gruppo (19 maggio 2009)

**La maestra vuole portare i suoi 21 alunni al Bio Parco.
Per arrivarci si organizzano con macchine che contengono
al massimo 4 passeggeri.
Quante macchine serviranno?**

Dati

21 = alunni che vanno al bio parco
4 = persone che contiene ogni TAXI

$$\begin{array}{r} 21 \div 4 \\ 15 \end{array}$$

Risposta

Servono 5 TAXI e un TAXI ~~per~~ per la
persona che rimane (che sarebbe 1).

Dati

21 = alunni che vanno al bio parco
4 = passeggeri sulla macchina
? = macchine in tutto

Risoluzione

Indicazione

$$21 : 4 = 5 R 1$$

Risposta

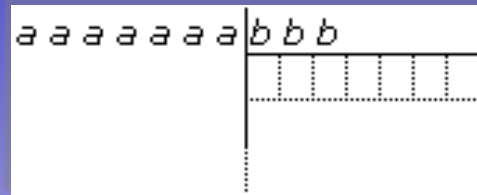
Servono 6 macchine
perché nelle 5 ci sono 4 alunni
nella 2^a 4
nella 3^a 4

Calcolo

$$21 \div 4 \\ 15$$

nella 4^a 4
e nella 5^a 4
e nella 6^a 1

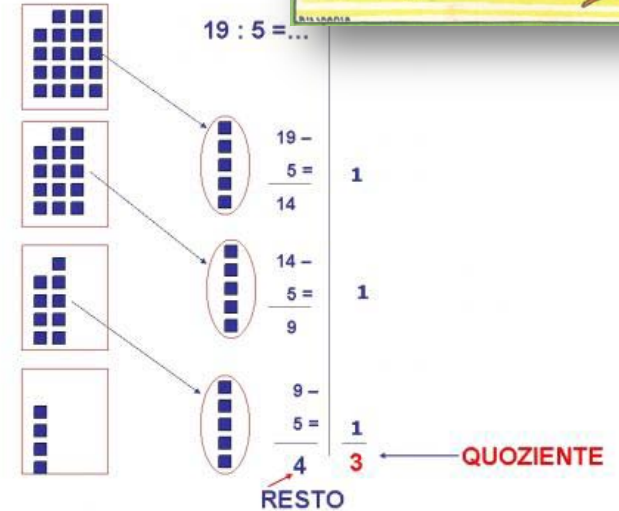
Aspetti matematici della divisione



La divisione fra teoria dei numeri e aritmetica elementare

I divisori di un numero e i numeri primi

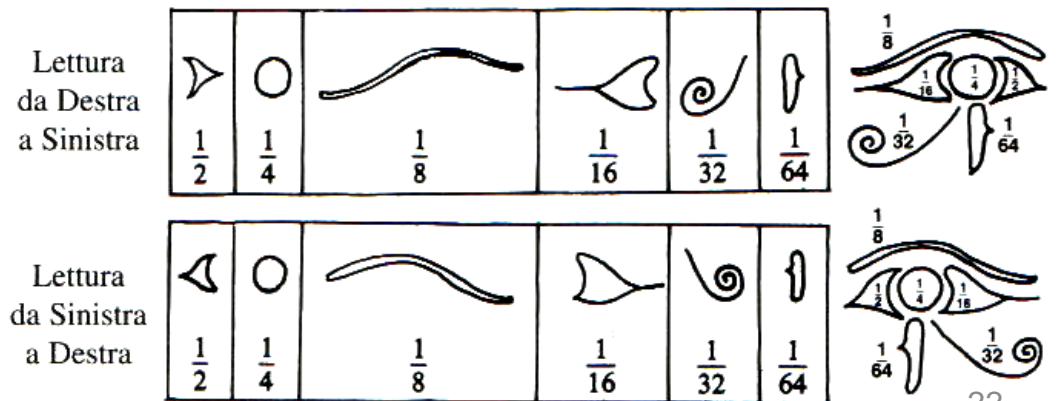
Divisione con resto: le congruenze



Divisione con resto: la decomposizione come rappresentazione

Gli algoritmi della divisione

Espansione in \mathbb{Q}



La divisione come "bestia nera"



RIFERIMENTI TEORICI

GEORGE POLYA

LAURENT LAFFORGUE

MARC LE BRIS

Marc Le Bris:
La “difficoltà” della divisione

Non esiste un modo universale d'insegnamento:

**bisogna insegnare le conoscenze
fatte di saperi ben definiti e precisi**



(vocabolario,
grammatica,
numeri e
operazioni)

- Esame dei metodi di lettura (fonetico vs globale)
- Problemi legati all'apprendimento della matematica

“Come l'apprendimento della lettura ha suscitato un vasto dibattito, così anche l'operazione matematica della divisione è da trent'anni al centro di una battaglia enorme.”

Le Bris M. *La scuola primaria e l'origine dell'insuccesso scolastico*, articolo pubblicato in: Lafforgue L., Lurçat L., *La disfatta della scuola. Una tragedia incompresa*, Casa Editrice Marietti, Milano, 2009.

George Polya:

Dai problemi ai comandamenti per gli insegnanti di matematica

**I dieci comandamenti
per un buon insegnante di matematica:**

- 1. Abbi interesse per la tua materia.**
- 2. Conosci la tua materia.**
- 3. Cerca di leggere sul viso degli studenti; cerca di capire le loro aspettative e le loro difficoltà; mettiti al loro posto.**
- 4. Tieni conto che il miglior modo per imparare qualsiasi cosa é di scoprirla da soli.**
- 5. Dai ai tuoi studenti non soltanto informazioni, ma anche sapere-come, attitudini mentali, abitudine al lavoro metodico.**

Polya G. *La scoperta matematica. Capire, imparare e insegnare a risolvere i problemi*, vol. I, Giangiacomo Feltrinelli Editore, Milano, 1983, 2 vol.

George Polya:

Dai problemi ai comandamenti per gli insegnanti di matematica

6. Fai loro imparare a congetturare.
7. Fai loro imparare a dimostrare.
8. Cerca quegli aspetti del problema in questione che possono essere utili per problemi futuri - cerca di mettere in evidenza lo schema generale che sta dietro la situazione concreta presente.
9. Non rivelare immediatamente tutto quello che sai e devi spiegare agli studenti - fallo congetturare dagli studenti prima di dirlo - fai loro scoprire, da soli, quanto più e' possibile.
10. Suggesto; non forzarlo.

Polya G. *La scoperta matematica. Capire, imparare e insegnare a risolvere i problemi*, vol. I, Giangiacomo Feltrinelli Editore, Milano, 1983, 2 vol.

George Polya:

Dai problemi ai comandamenti per gli insegnanti di matematica

“L'insegnamento non è una scienza; è un'arte. Se l'insegnamento fosse una scienza ci sarebbe un modo migliore di insegnare e tutti dovrebbero seguire quel modo. Poiché l'insegnamento non è una scienza offre grande spazio e possibilità per le differenze personali.”

Polya G. (*How to solve it*) *Come risolvere i problemi di matematica. Logica ed euristica nel metodo matematico*, Feltrinelli, Milano, 1967.

Grazie a tutti per l'attenzione

