

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2005/2006
TN 1

Recupero della prima prova di valutazione intermedia - 16 giugno 2006

NOTA: Svolgere gli esercizi nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni. **E' consentito l'uso della calcolatrice.** Non è consentito l'uso di libri e appunti.

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} 3X + 9Y \equiv 8 \pmod{13} \\ 6X + \lambda Y \equiv 8 \pmod{13} \end{cases}$$

- (a) Determinare per quali $\lambda \in \mathbb{Z}$ il sistema ha soluzione.
- (b) Risolvere il sistema per il più piccolo $\lambda > 0$ per cui ha soluzione.

Esercizio 2. Si consideri l'equazione diofantea in due indeterminate

$$(4\lambda + 2)X + 5Y = 16$$

1. Determinare per quali $\lambda \in \mathbb{Z}$ l'equazione ha soluzione
2. Determinare tutte le soluzioni per il più piccolo $\lambda \geq 0$ per cui l'equazione ha soluzione.

Esercizio 3.

- (a) Determinare tutte le radici primitive (mod 17).
- (b) Determinare tutte le soluzioni della congruenza

$$18X^4 + 17X^3 + 34X^2 + 51X + 1 \equiv 0 \pmod{153}.$$

Esercizio 4.

- (a) Enunciare il Teorema di Wilson.
- (b) Dimostrare che $61! + 1 \equiv 63! + 1 \equiv 0 \pmod{71}$.
- (c) Enunciare il Teorema di Eulero-Fermat.
- (d) Determinare il più piccolo intero positivo congruo a $69^{2037} \cdot (62!)^{773} \pmod{71}$.