Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2005/2006
TN 1
Appello A - 16 giugno 2006

NOTA: Svolgere gli esercizi nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni. **E' consentito l'uso della calcolatrice.** Non è consentito l'uso di libri e appunti.

Esercizio 1.

(a) Determinare quali dei seguenti numeri sono somma di due quadrati (giustificando la risposta).

   (i) 10829

   (ii) 704

(b) Scrivere tali numeri come somma di due quadrati.

(c) Determinare una terna pitagorica (x, y, z) con $z = 10829$.

Esercizio 2. Si consideri l'equazione diofantea in due indeterminate

$$(4\lambda + 2)X + 5Y = 16$$

1. Determinare per quali $\lambda \in \mathbb{Z}$ l'equazione ha soluzione
2. Determinare tutte le soluzioni per il più piccolo $\lambda \geq 0$ per cui l'equazione ha soluzione.

Esercizio 3.

(a) Determinare tutte le radici primitive (mod 17).

(b) Determinare tutte le soluzione della congruenza

$$18X^4 + 17X^3 + 34X^2 + 51X + 1 \equiv 0(\text{mod } 153).$$

Esercizio 4.
Sapendo che 887 e 1021 sono numeri primi determinare se la seguente congruenza ha soluzione:

$$X^2 \equiv 887(\text{mod } 1021)$$

Esercizio 5 Si considerino le funzioni aritmetiche ω e Ω così definite: se $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_r^{e_r}$ (con $p_i \neq p_j$ se $i \neq j$),

$$\omega(n) := r$$

$$\Omega(n) := e_1 + e_2 + \dots + e_r.$$

(a) Determinare se ω e Ω sono funzioni moltiplicative.

(b) Sia λ la funzione aritmetica definita da $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$. Dimostrare che λ è totalmente moltiplicativa.

(c) Dimostrare che

$$\lambda \star \mathbf{1}(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è un quadrato perfetto} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(d) Sia $F = \lambda \star \mathbf{1} \star \sigma$. Determinare $F(44)$ e $F^{-1}(44)$.

(e) Sia f la funzione aritmetica determinata dalla formula di inversione di Möbius. Calcolare $f(44)$.

Esercizio 6

(a) Enunciare il Teorema di Wilson.

(b) Dimostrare che $61! + 1 \equiv 63! + 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 71)$.

(c) Enunciare il Teorema di Eulero-Fermat.

(d) Determinare il più piccolo intero positivo congruo a $69^{2037} \cdot (62!)^{773}$ (mod 71).