Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2005/2006
TN 1
Appello B - 13 luglio 2006

NOTA: Svolgere gli esercizi nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni. **E' consentito l'uso della calcolatrice.** Non è consentito l'uso di libri e appunti.

Esercizio 1.

(a) Dare la definizione di terna pitagorica primitiva.

(b) Enunciare il teorema di classificazione per le terne pitagoriche primitive positive.

(c) Determinare, se esiste, una terna pitagorica (x, y, z) con $z = 765$

Esercizio 2. Si consideri l'equazione diofantea in due indeterminate

$$(2\lambda + 4)X + 5Y = 12$$

1. Determinare per quali $\lambda \in \mathbb{Z}$ l'equazione ha soluzione
2. Determinare tutte le soluzioni per il più piccolo $\lambda \geq 0$ per cui l'equazione ha soluzione.

Esercizio 3.

(a) Determinare tutte le radici primitive (mod 31).

(b) Determinare tutte le soluzione della congruenza

$$(30!)X^{17} + 31X^4 + 62X^3 + 31X + 2 \equiv 0 (\text{mod } 279).$$

Esercizio 4. Si consideri il seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} 10^{23}X + 7^{50}Y \equiv 8 (\text{mod } 13) \\ 7^{12}X + \lambda Y \equiv 5 (\text{mod } 13) \end{cases}$$

(a) Determinare per quali $\lambda \in \mathbb{Z}$ il sistema ha soluzione.

(b) Risolvere il sistema per il più piccolo $\lambda > 0$ per cui ha soluzione.

Esercizio 5

(a) Determinare se la funzione $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto \left(\frac{n}{89}\right)\sigma(n)$ è una funzione moltiplicativa. ($\left(\frac{n}{89}\right)$ *indica il simbolo di Legendre.*)

(b) Sia $F = \psi * \tau$. Calcolare $F(137)$ e $F^{-1}(137)$.

(c) Sia f la funzione aritmetica determinata dalla formula di inversione di Möbius. Calcolare $f(137)$.

Esercizio 6 Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$. Vogliamo dimostrare che ogni numero primo divide almeno uno degli a_n.

(a) Dimostrare che 2 e 3 dividono a_2.

(b) Sia ora $p \geq 5$. Dimostrare che $3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6^{p-1} \equiv 6 (\text{mod } p)$.

(c) Dedurne che $p \,|\, 6a_{p-2}$ e quindi a_{p-2}.