Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2005/2006
TN 1
Tutorato 1 - 21 febbraio 2006

1. Sia $n \geq 2$ un intero fissato. Mostrare che:

(a) $a \equiv b \pmod{n}$, $c \equiv d \pmod{n} \Rightarrow a + c \equiv b + d \pmod{n}$;

(b) $a \equiv b \pmod{n}$, $c \equiv d \pmod{n} \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{n}$;

(c) $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a^k \equiv b^k \pmod{n}$, per ogni $k \geq 1$;

(d) $a \equiv b \pmod{n}$ $m \mid n \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$;

(e) $a \equiv b \pmod{n}$, $m \neq 0$, $\Rightarrow am \equiv bm \pmod{nm}$;

(f) $a \equiv b \pmod{n}$, $d \neq 0$, $d \mid a$, $d \mid b$, $d \mid n \Rightarrow a/d \equiv b/d \pmod{n/d}$;

(g) $ac \equiv bc \pmod{n}$, $d = \mathrm{MCD}(c, n) \Rightarrow a \equiv b \pmod{n/d}$;

(h) $ac \equiv bc \pmod{n}$, $\mathrm{MCD}(c, n) = 1 \Rightarrow a \equiv b \pmod{n}$;

(i) $ac \equiv bc \pmod{p}$, p primo, $p \nmid c \Rightarrow a \equiv b \pmod{p}$;

(l) $a \equiv b \pmod{n}$, $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a \equiv b \pmod{\mathrm{mcm}(n, m)}$.

2. Siano $a, b, n, \in \mathbb{Z}$ con $a, b \geq 1$, $n \geq 2$. Mostrare che:

$$a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow \mathrm{MCD}(n, a) = \mathrm{MCD}(n, b).$$

3. Calcolare il massimo comun divisore delle seguenti coppie di numeri e scriverlo sottoforma di identità di Bezout:

$$(346, 245), (1819, 3587), (157, 334).$$

4. Dimostrare che il prodotto di tre interi consecutivi è divisibile per 6 e che il prodotto di quattro interi consecutivi è divisibile per 24.

5. Dimostrare che $4 \not| (n^2 + 2)$ per ogni intero n.

6. Dimostrare che se x e y sono dispari allora $x^2 + y^2$ è pari, ma non divisibile per 4.

7. Dimostrare che $\mathrm{MCD}(a,b) = \mathrm{MCD}(a,b,a+b)$, per ogni $a,b \in \mathbb{Z}$.

8. Sia p un numero primo e $a,b \in \mathbb{N}$. Sapendo che $\mathrm{MCD}(a,p^2) = p$ e $\mathrm{MCD}(b,p^3) = p^2$, calcolare $\mathrm{MCD}(ab,p^4)$ e $\mathrm{MCD}(a+b,p^4)$.

9. Determinare un intero positivo n tale che $\mathcal{S} := \{n, 89, 100, 182, 257, 339, 670, 907, 999\}$ sia un sistema completo di residui (mod 9). Determinare un sottoinsieme di $\mathcal{S}$ che sia un sistema ridotto di residui (mod 9).

10. Determinare se le seguenti affermazioni sono vere o false, dimostrare quelle vere e dare un controesempio per quelle false:

(1) Siano p un primo e a un intero. Se $p^3 \mid a^3$ allora $p \mid a$.

(2) Siano a e b due interi. Se $a^3 \mid b^3$ allora $a \mid b$.

(3) Siano a,b,n interi. Se $\mathrm{MCD}(n,a) = \mathrm{MCD}(n,b)$ allora $a \equiv b \pmod{n}$.

(4) Se a,b,n sono tre interi tali che $\mathrm{MCD}(a,b) = 1$ allora $ab \mid n$ se e soltanto se $a \mid n$ e $b \mid n$.

(5) Se a,b,n sono tre interi tali che $\mathrm{MCD}(a,b) \mid \mathrm{MCD}(b,c)$ allora $a \mid c$.

(6) Se a è un intero tale che $\mathrm{MCD}(a,4) = 2$ e $\mathrm{MCD}(b,4) = 2$ allora $\mathrm{MCD}(a+b,4) = 4$.