Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a. a. 2005/2006
TN 1
Tutorato 8 - 9 maggio 2006

1. Per ogni $k \geq 2$, dimostrare che:
(1) $n = 2^{k-1}$ soddisfa l'equazione $\sigma(n) = 2n - 1$
(2) se 2^k-1 è primo, allora $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ soddisfa l'equazione $\sigma(n) = 2n$
(3) se 2^k-3 è primo, allora $n = 2^{k-1}(2^k - 3)$ soddisfa l'equazione $\sigma(n) = 2n+2$

2. Per ogni intero positivo n dimostrare che: $\Sigma_{d|n} (\tau(d))^3 = (\Sigma_{d|n} \tau(d))^2$

3. Sia n un intero positivo e sia S(n) il numero degli interi m privi di fattori quadratici minori di n. Dimostrare che: $S(n) = \Sigma_{k=1,\dots,n} | \mu(k) | = 2^r$, dove r è il numero dei divisori primi distinti di n.

4. Dimostrare che:
(1) $\Sigma_{d|n} \sigma(d) = n \Sigma_{d|n} \tau(d)/d$
(2) $\Sigma_{d|n} d\tau(d) = n \Sigma_{d|n} \sigma(d)/d$

5. Mostrare che, presi comunque $n, m \geq 1$,
(1) $\varphi(n^2) = n\varphi(n)$
(2) $n|m \Rightarrow \varphi(nm) = n\varphi(m)$
(3) $n|m \Rightarrow \varphi(n)\varphi(m) = \varphi(nm)\varphi(n)/n$

6. Dimostrare che se $n \geq 2$ è un intero composto (cioè non primo), allora: $\varphi(n) \leq n - \sqrt{n}$