Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2005/2006
TN 1
Tutorato 6 - 28 marzo 2006

1. Determinare tutte le eventuali soluzioni del seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} 3X \equiv 2 \pmod{7} \\ 3X \equiv 9 \pmod{11} \\ 4X \equiv 1 \pmod{9} \end{cases}$$

2. Dato il sistema:

$$\begin{cases} 8X + 13\lambda Y \equiv 15 \pmod{29} \\ 22X + 14Y \equiv 3\mu \pmod{29}\,. \end{cases}$$

(a) Studiare la risolubilità del sistema assegnato al variare di λ e μ, con $0 \leq \lambda, \mu \leq 28$ (cioè dire quando è risolubile e, nei casi in cui è risolubile, dire quante soluzioni ammette).

(b) Al variare di λ e μ, con $1 \leq \lambda \leq 2$ e $20 \leq \mu \leq 21$, trovare tutte le (eventuali) soluzioni del sistema. Nel caso in cui vi siano più di una soluzione, è possibile descrivere tutte le soluzioni anche attraverso una forma parametrica.

3. Determinare tutte le (eventuali) soluzioni della congruenza polinomiale:

$$X^4 + 78X^3 + 181X^2 + 93X + 25 \equiv 0 \pmod{54}\,.$$

4. Data l'equazione diofantea:

$$4(\lambda - 3)X + 27Y = 120,$$

(a) determinare per quali valori di $\lambda \in \mathbb{Z}$ l'equazione è risolubile;

(b) scrivere esplicitamente le soluzioni dell'equazione assegnata per $\lambda = 4$;

(c) avendo a disposizione 50 asticelle da 4 cm e 10 asticelle da 27 cm, descrivere tutte le possibili combinazioni di asticelle in modo da ottenere una lunghezza pari a 1, 20 m.

5. Sia p un primo della forma $8t+3$, con $t>0$, e si supponga che $q := \frac{p-1}{2}$ sia anch'esso un primo.

(a) Dimostrare che se a è relativamente primo con p, allora $\mathrm{ord}_p(a) = 2, q, 2q$.

(b) Dimostrare che $2q \equiv 1 \pmod{p}$ se e soltanto se $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$.

(c) Mostrare che 2 è una radice primitiva di p.

(d) Determinare almeno due radici primitive distinte di 27.

6. Calcolare utilizzando l'algoritmo di Gauss tutte le radici primitive (mod 23).

7. Determinare per quali valori di a la congruenza $X^6 \equiv a \pmod{23}$ è risolubile e determinare, per ciascun valore di a per il quale è risolubile, le soluzioni (mod 23).

8. Trovare tutte le (eventuali) soluzioni (modulo 17×16) della congruenza:

$$7^X \equiv X^4 \pmod{17}.$$