Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2005/2006
TN 1
Tutorato 3 - 7 marzo 2006

1. Determinare tutte le eventuali soluzioni del seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} 2X \equiv 1 \pmod 5 \\ 3X \equiv 9 \pmod 6 \\ 4X \equiv 1 \pmod 7 \\ 5X \equiv 9 \pmod{11} \end{cases}$$

2. Determinare tutte le eventuali soluzioni del seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} 7X \equiv 1 \pmod{20} \\ 12X \equiv 9 \pmod 7 \\ 5X \equiv 9 \pmod{53} \\ 5X \equiv 1 \pmod{12} \end{cases}$$

3. Si supponga di avere a disposizione monete da 5, da 20 e da 50 centesimi. Determinare tutte le possibili combinazioni di questi tre gruppi di monete per ottenere la somma di 25 euro in modo da prendere almeno una moneta per ogni gruppo.

4. Provare che:

(1) ogni primo della forma $3n + 1$ è anche della forma $6m + 1$;

(2) ogni intero della forma $3n + 2$ possiede un fattore primo della stessa forma;

(3) l'unico primo della forma $3n + 2$ è 7;

(4) l'unico primo tale che $3p + 1$ è un quadrato perfetto è $p = 5$.

5. Si supponga di disporre di un congruo numero di monete di due tipi: monete di tipo **A** da 37 mm di diametro, monete di tipo **B** da 27 mm di diametro. E possibile giustapporre monete di tipo **A** e monete di tipo **B** fino ad ottenere la lunghezze di 1 metro? In caso di risposta positiva, indicare il numero di monete di tipo **A** ed il numero di monete di tipo **B** impiegate.

6. Mostrare che $a^{25} - a$ è divisibile per 30, qualunque sia l'intero a.

7. Dimostrare che un intero $n \geq 2$ è primo se, e soltanto se, $(n-2)! \equiv 1 (\mathrm{mod}\ n)$.

8. Dimostrare con il metodo dell'esponenziazione modulare che $3^{341} \not\equiv 3 (\mathrm{mod}\ 31)$. Dedurne che 341 non è un numero di Carmichael.

9. Siano $n_1, n_2, \ldots, n_r$ interi positivi a due a due relativamente primi e si ponga $n = n_1 n_2 \ldots n_r$. Dimostrare, giustificando ed illustrando adeguatamente tutti i passaggi, che $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_n$ è isomorfo al prodotto $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{n_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{n_r}$.