

COGNOME ..... NOME ..... MATRICOLA .....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 3 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

---

1. Spiegare come usare la nozione di simbolo di Jacobi per calcolare il simbolo di Legendre.
2. Dimostrare che esistono infinite coppie di interi positivi  $(a, n)$  con  $a < n$  e tali che il simbolo di Jacobi  $\left(\frac{a}{n}\right) = 1$  ma la congruenza  $X^2 \equiv a \pmod{n}$  non ammette soluzione.
3. Assumere la legge di reciprocità quadratica per simboli di Legendre e la si dimostri per simboli di Jacobi.
4. Mostrare che se  $n$  è privo di fattori quadratici e  $f$  è una funzione aritmetica moltiplicativa allora

$$(f * f * f)(n) = f(n) \cdot (\tau * \mathbf{1})(n).$$

5. Enunciare e dimostrare la formula di inversione di Möbius.
6. Calcolare  $(\varphi * \varphi * \varphi)(2^4)$ .
7. Mostrare che se  $(x, y, z)$  è una terna pitagorica, allora  $60 \mid xyz$ .
8. Enunciare il Teorema di classificazione delle terne pitagoriche positive, primitive e normali.
9. Trovare tutte le 10 soluzioni di  $x^2 + 2y^2 = 162$ .
10. Scrivere 13940 come somma di due quadrati in almeno 9 modi diversi.
11. Mostrare che i numeri della forma  $7 \cdot 4^e$  non si possono scrivere come somme di tre quadrati e scriverli come somma di quattro quadrati.
12. Enunciare e dimostrare il Teorema dei quattro quadrati.