

1 Esercizio = 3 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

---

1. Si determinino tutte le soluzioni intere della seguente equazione:  $4X + 6Y - 10Z = 100$ .
2. Enunciare e dimostrare il Teorema di Wilson.
3. Calcolare il numero delle soluzioni modulo 27 della seguente congruenza polinomiale:  
 $(X - 1)^2(X^2 + X + 1) \equiv 0 \pmod{27}$ .
4. Enunciare il Teorema del sollevamento per congruenze polinomiali.
5. Calcolare le soluzioni del sistema di congruenze:  $\begin{cases} 2X \equiv 3 \pmod{9} \\ X \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$  nell'intervallo  $[50, 150]$ .
6. Dimostrare il Teorema cinese dei resti.
7. Quante e quali soluzioni ha la congruenza  $X^4 \equiv 4 \pmod{17}$ ?
8. Quale è il massimo possibile valore per l'ordine di un intero modulo 35? Giustificare la risposta.
9. Siano  $p$  e  $q$  primi dispari tali che  $p \equiv 2 \pmod{q}$  e  $p + q \equiv 0 \pmod{4}$ . Dimostrare che  $\left(\frac{q}{p}\right) = 1$ .
10. Calcolare tutte le radici primitive modulo 25.
11. Calcolare il seguente simbolo di Legendre:  $\left(\frac{1212}{2213}\right)$ .
12. Sia  $p$  un primo,  $a$  un intero non divisibile per  $p$  e  $g$  una radice modulo  $p$ . Dimostrare che  $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\text{ind}_g(a)}$ .