

COGNOME NOME MATRICOLA

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 3 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

1. Costruire tutte le soluzioni dell'equazione diofantea $10X + 11Y + 12Z = 3$.

2. Enunciare e dimostrare il Teorema Cinese dei Resti e spiegare come utilizzarlo per ridurre il problema dello studio delle congruenze polinomiali modulo n a quello delle congruenze polinomiali modulo una potenza di un numero primo.

3. Determinare il numero di soluzioni di $2X^3 + 2X + 4 \equiv 0 \pmod{16}$.

4. Enunciare e dimostrare il Teorema di Eulero per il calcolo del simbolo di Legendre.

5. Determinare (se esistono) tutte le radici primitive di $\mathbf{Z}/34\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Z}/21\mathbf{Z}$.

6. Dato un primo p e un intero m , per quanti valori di $a \in \{0, 1, 2, \dots, 2p - 1\}$ la congruenza $X^m \equiv a \pmod{p}$ è risolubile? Giustificare la risposta.

7. Calcolare il seguente simbolo di Jacobi/Legendre: $\left(\frac{2222}{3137}\right)$.

8. Supponiamo che n sia un intero i cui fattori primi sono tutti congruenti a 1 modulo 4 e che n abbia 5 fattori primi distinti. Quante soluzioni ha la congruenza $X^2 + 1 \equiv 0 \pmod{n}$?

9. Dimostrare che $\tau^{-1} = \mu * \mu$ giustificando ogni passaggio.

10. Dopo aver definito precisamente la nozione di terna pitagorica positiva, primitiva e normale (tpppn), enunciare il Teorema di classificazione delle tpppn.

