COGNOME .... *NOME* .... *MATRICOLA* ....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 3 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

1. Calcolare per quali valori di $\alpha \in \mathbf{Z}/13\mathbf{Z}$ la congruenza

$$X^2 + X + \alpha \equiv 0 \bmod 13$$

è risolubile.

2. Enunciare e dimostrare il criterio di Eulero per il calcolo del simbolo di Legendre.

3. Si calcoli il simbolo di Legendre $\left(\frac{1755}{3001}\right)$.

4. Dopo aver definito la nozione di residuo quadratico, dimostrare che il numero di residui quadratici in $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}^*$ è $(p-1)/2$.

5. Mostrare che se $p \equiv 9 \bmod 28$, allora $\left(\frac{7}{p}\right) = 1$.

6. Sia $\omega(n)$ il numero di divisori primi distinti dell'intero n. Mostrare che per ogni numero complesso z, la funzione $f_z(n) := z^{\omega(n)}$ è moltiplicativa. Nel caso in cui $z = i$, calcolare $(f_z * \mu)(60)$.

7. Enunciare e dimostrare la formula di inversione di Möbius.

8. Elencare tutte le terne pitagoriche primitive e positive (x, y, z) con $x, y, z \leq 85$.

9. Enunciare il teorema di caratterizzazione per i numeri che si possono esprimere come somma di due quadrati.

10. Esprimere $5^s 13^t$ per ogni $s, t \in \mathbf{N}$ come somma di due quadrati.

11. Dopo aver espresso 3 e 5 come somma di tre quadrati, mostrare che non è detto che se due interi si esprimono come somma di tre quadrati, allora anche il loro prodotto si esprime come somma di tre quadrati. Fornire più di un contro esempio.

12. Scrivere 47 come somma del minor numero possibile di quadrati.

NOME E COGNOME	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	TOT.
....													