Corso di Algebra I del Prof. Pappalardi

Tutorato I del $02 - 10 - 2008$

Tutori: Luca Dell'Anna, Elisa Di Gloria

http://www.matematica3.com

Esercizio 1
Siano A,B e C tre insiemi. Mostrare che:

1. $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \setminus B$
2. $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$
3. $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
4. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
5. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C) \supset (A \setminus B) \setminus C$
6. $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A) = ((A \cup B) \setminus C) \cup A$
7. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

Esercizio 2
$\forall$ r $\in \mathbb{R}_+$ e $\forall$ n $\in \mathbb{N} \setminus \{0\} = \mathbb{N}_+$ Siano:
T_r :=$\{x \in \mathbb{R} | -\frac{1}{r} \leq x \leq \frac{1}{r}\}$
$R_n := \{x \in \mathbb{R} | -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}\}$
Determinare:

- $\bigcup_{r \in \mathbb{R}_+} T_r$;
- $\bigcap_{r \in \mathbb{R}_+} T_r$;
- $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} R_n$;
- $\bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} R_n$.

Esercizio 3
Per ogni intero positivo n, si consideri il seguente sottoinsieme dei numeri reali:

$$A_n := \{x \text{ } numero \text{ } reale \ : \ x \leq 1/n\}$$

Determinare:

1. $\cap(A_n : n \geq 1)$
2. $\cup(A_n : n \geq 1)$

Esercizio 4
Determinare $A \cap B$ e $A \cup B$ nei seguenti casi:

- $A = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 - 4x - 5 \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 - 12x + 20 \leq 0\}$;
- $A = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 - 5x + 6 \geq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 - 4 \leq 0\}$;
- $A = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 - 8x + 7 \geq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} | x - 3 \leq 0\}$;
- $A = \{x \in \mathbb{Z} | x = 5n,\ n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} | x = 12n,\ n \in \mathbb{Z}\}$;

Esercizio 5
Determinare $A \cap B$, $A \cup B$, $B \setminus A$ e $A \setminus B$ nei seguenti casi:

1. $A = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 - 3x + 2 \leq 0\}$; $B = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 - 12x + 20 > 0\}$
2. $A = \{x \in \mathbb{Z} | \frac{5x-3}{2-x} \geq 0\}$; $B = \{x \in \mathbb{Z} | \frac{-7x+2}{3x-1} \leq 0\}$

Esercizio 6
Supponiamo che gli studenti del secondo anno del Corso di Laurea in Matematica siano 200 e che essi abbiano superato almeno un esame. Supponiamo inoltre che 120 studenti abbiano superato Algebra 1 e 130 Analisi 1. Quanti studenti hanno superato tutti e due gli esami?

Esercizio 7
Sia $A = \{x \in \mathbb{N} | 3 \leq x \leq 28\}$. Siano $B = \{x \in A | x = 2n \text{ con } n \in \mathbb{N}\}$
$C = \{x \in A | x = 5m \text{ con } m \in \mathbb{N}\}$
Determinare $B \cap C$, $B \cup C$, $B \setminus C$.

Esercizio 8
Sia $A := \{x \in \mathbb{Z} | x^2 - 1 \leq 0\}$. Determinare: $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$, $\mathcal{P}(A) \setminus A$.

Esercizio 9
Date le seguenti funzioni, stabilire quali di esse sono iniettive e/o suriettive e quando possibile calcolarne esplicitamente l'inversa, definire il codominio, il dominio, l'immagine.

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come:

- $f(x) = x^2$;
- $f(x) = x + 3$;
- $f(x) = 2x + 6$;
- $f(x) = x^3 - 2$;
- $f(x) = 6x^4 + 1$.

Siano ora:

- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \qquad f(n) = 3n$;
- $f : \mathbb{R} \to [-1, 1] \qquad f(x) = \sin(\pi x) + 2$;
- $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \qquad f(n) = 5n - 2$.