Università degli Studi Roma Tre
Anno Accademico 2008/2009
AL1 - Algebra 1
Esercitazione 7
Venerdì 21 Novembre 2008
domande/osservazioni: dibiagio@mat.uniroma1.it

1. Dimostrare per induzione forte che:
   (a) ogni numero intero positivo n si può scrivere come somma di potenze di due distinte;
   (b) ogni numero intero positivo n si può scrivere come somma di numeri di Fibonacci distinti;
   (c) chiamata ϕ la radice positiva dell'equazione $x^2 - x - 1 = 0$, l'n-esimo numero di Fibonacci è uguale a $\frac{\phi^n-(1-\phi)^n}{\sqrt{5}}$.

   (a) Per $n = 1$ l'asserto è verificato: $1 = 2^0$. Supponiamo vero l'asserto per $1, \ldots, n$ e dimostriamolo per $n+1$. Se $n+1$ è una potenza di 2 non vi è nulla da dimostrare, altrimenti $\exists k \in \mathbb{N}$ tale che $2^k < n+1 < 2^{k+1}$. Consideriamo $n+1-2^k$: per l'ipotesi induttiva $n+1-2^k$ è somme di potenze di 2 distinte. Notiamo che tra tali potenze non può comparire 2^k, altrimenti $n+1 \geq 2^k+2^k = 2^{k+1}$. Dato che $n+1 = (n+1-2^k)+2^k$ la dimostrazione è conclusa.
   (b) Ricordiamo che i numeri di Fibonacci, F_n, sono definiti ricorsivamente come $F_1 = 1, F_2 = 1, \ldots, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \ldots$. Per $n = 1$ l'asserto è ovviamente verificato: $1 = F_1$. Supponiamolo quindi vero per $1, \ldots, n$ e dimostriamolo per $n + 1$. Se $n + 1$ è un numero di Fibonacci allora non vi è nulla da dimostrare, altrimenti $\exists k \in \mathbb{N}$ tale che $F_k < n + 1 < F_{k+1}$. Consideriamo $n + 1 - F_k$: per l'ipotesi induttiva esso si può scrivere come somme di numeri di Fibonacci distinti. Notiamo che tra tali numeri di Fibonacci non può comparire F_k altrimenti $n + 1 \geq F_k + F_k \geq F_k + F_{k-1} = F_{k+1}$. Dato che $n + 1 = (n + 1 - F_k) + F_k$ la dimostrazione è conclusa.
   (c) $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Notiamo, inoltre, che anche $1 - \phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ è radice dell'equazione. Quindi $\phi + 1 = \phi^2$ e $(1 - \phi) + 1 = (1 - \phi)^2$. Procediamo con la dimostrazione per induzione: il caso $n = 1$ è ovviamente verificato; supponiamo allora l'asserto vero per $1, \ldots, n$ e dimostriamolo per $n + 1$: $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ =(ipotesi induttiva) $\frac{\phi^n-(1-\phi)^n}{\sqrt{5}} + \frac{\phi^{n-1}-(1-\phi)^{n-1}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{n-1}(\phi+1) - (1-\phi)^{n-1}((1-\phi)+1)) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{n+1} - (1-\phi)^{n+1})$.

2. Calcolare $(1 + i)^{86}$, $(1 + i\sqrt{3})^{42}$, $(\sqrt{3} + i)^{18}$.

   Per calcolare potenze, e più in generale prodotti, di numeri complessi è conveniente ricondursi alla forma polare (o trigonometrica) dei numeri stessi. Quindi: $1 + i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4))$ da cui $(1 + i)^{86} = 2^{43}(\cos(3\pi/2) + i \sin(3\pi/2)) = -2^{43}i$; $1 + i\sqrt{3} = 2(\cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3))$ da cui $(1 + i\sqrt{3})^{42} = 2^{42}$; $(\sqrt{3} + i) = 2(\cos(\pi/6) + i \sin(\pi/6))$, da cui $(\sqrt{3} + i)^{18} = -2^{18}$.

3. Calcolare tutte le radici ottave complesse dell'unità e individuarne la posizione sul piano di Gauss.

   Le radici complesse ottave dell'unità sono quei numeri complessi (scritti in forma polare) $\rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ tali che $(\rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta)))^8 = \rho^8(\cos(8\theta)+i\sin(8\theta)) = 1 = 1(\cos(0)+i\sin(0))$. Affinché due numeri scritti in forma polare siano uguali essi devono avere stesso modulo e argomenti che differiscono per multipli di 2π: nel nostro caso si ha $\rho = 1$, $\theta = \frac{2\pi k}{8}$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$. Per $k = 0, \dots, 7$ avremo gli otto valori distinti di θ tra 0 (incluso) e 2π (escluso): $0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 3\pi/2, 7\pi/4$. A essi corrispondono le otto radici dell'unità: $1, \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, i, -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, -i, \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Tali punti sono i vertici di un ottagono regolare inscritto nella circonferenza di centro 0 e raggio 1 nel piano di Gauss.

4. Determinare tutte le soluzioni complesse $z \in \mathbb{C}$ del seguente sistema:
   $$\begin{cases} |z| = 1 \\ |1 - z| = 1 \end{cases}$$

   Scriviamo $z = x + iy$. Allora le due equazioni del sistema si leggono come: $x^2 + y^2 = 1$ e $(1 - x)^2 + y^2 = 1$ da cui $x = 1/2$, $y = \pm\sqrt{3}/2$. Quindi il sistema ammete due soluzioni: $z_1 = 1/2 + i\sqrt{3}/2$ e $z_2 = 1/2 - i\sqrt{3}/2$.