Università degli Studi Roma Tre
Anno Accademico 2008/2009
AL1 - Algebra 1
Esercitazione 4
Giovedì 23 Ottobre 2008
domande/osservazioni: dibiagio@mat.uniroma1.it

1. Trovate una biiezione tra:

   (a) $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$;

   (b) $[0,2) \subset \mathbb{R}$ e $(0,2) \subset \mathbb{R}$.

   (a) Sia $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ così definita:

   $$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}, \\ x+1 & \text{se } x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

   f è una funzione iniettiva: infatti se $f(x) = f(y)$ allora:

   i. se $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$ allora $f(x) = x = f(y) \Rightarrow f(y) \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N} \Rightarrow y \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N} \Rightarrow f(y) = y \Rightarrow x = y$,

   ii. se $x \in \mathbb{N}$ allora $f(x) = x+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow f(y) \in \mathbb{N} \Rightarrow y \in \mathbb{N} \Rightarrow f(y) = y+1 \Rightarrow x+1 = y+1 \Rightarrow x = y$.

   f è anche suriettiva: infatti se $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ allora:

   i. se $x \notin \mathbb{N}$ allora $f(x) = x$,

   ii. se $x \in \mathbb{N}$ allora, dato che $x \neq 0$ si ha che $f(x-1) = x$, con $x - 1 \in \mathbb{N}$.

   (b) Sia $A := \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}_+\}$, $B := \mathbb{R} \setminus (A \cup \{0\})$. Sia $f : [0,2) \to (0,2)$ così definita:

   $$f(x) = \begin{cases} 1/(1/x+1) & \text{se } x \in A; \\ x & \text{se } x \in B; \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

   Si verifica che f è iniettiva e suriettiva.

2. Dimostrate per induzione che:

   (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ è multiplo di 7;

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}_+$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.

   (a) La base dell'induzione ($n = 0$) è chiaramente verificata ($4 + 3 = 7$). Supponiamo allora l'asserto vero per n e dimostriamolo per $n+1$: $2^{n+1+2} + 3^{2n+2+1} = 2(2^{n+1}) + 9(3^{2n+1}) = 2(2^{n+1}) + (7+2)(3^{2n+1}) = 2(2^{n+1} + 3^{2n+1}) + 7 \cdot 3^{2n+1}$ che è divisibile per 7 per l'ipotesi induttiva.

   Oppure si poteva procede con il passo induttivo in un modo leggermente diverso: l'ipotesi induttiva "$2^{n+2} + 3^{2n+1}$ è multiplo di 7 " si può rileggere come: $\exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $2^{n+2} + 3^{2n+1} = 7k$, cioè $\exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $2^{n+2} = 7k - 3^{2n+1}$. Quindi $2^{n+1+2} + 3^{2n+2+1} = 2(2^{n+1}) + 9(3^{2n+1}) = 2(7k - 3^{2n+1}) + 9(3^{2n+1}) = 14k + 7 \cdot 3^{2n+1}$, che è chiaramente divisibile per 7.

(b) Per $n = 1$ si ha $1 \leq 2-1 = 1$, perciò la base dell'induzione è verificata. Supponiamo allora l'asserto vero per n e dimostriamolo per $n+1$: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2} = 2 - \frac{n(n+1)+1}{n(n+1)^2} \leq 2 - \frac{n(n+1)}{n(n+1)^2} = 2 - \frac{1}{n+1}$.

3. Supponete di avere una scacchiera $2^n \times 2^n$ (per $n = 3$ avete la scacchiera classica). Da tale scacchiera rimuovete una casella: dimostrate che, dovunque rimuoviate la casella, le restanti caselle possono essere tassellate con tasselli di 3 caselle a forma di L.

4. Considerate le seguenti relazioni binarie su X:

   (a) $X = \mathbb{Z}$, $xRy :\Leftrightarrow x - y$ è divisibile per 3;

   (b) $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (x_1, x_2)R(y_1, y_2) :\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2$;

   (c) $X = \mathbb{Q}$, $xRy :\Leftrightarrow x - y \leq 0$;

   (d) $X = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $xRy :\Leftrightarrow MCD(x, y) \neq 1$.

   Per ciascuna dite se si tratta di una relazione d'equivalenza e, nel caso, determinate l'insieme quoziente X/R.

   (a) R gode della proprietà riflessiva: $\forall x \in \mathbb{Z},\ x - x = 0$ è divisibile per 3. R gode della proprietà simmetrica: se $x - y = 3h$, $\exists h \in \mathbb{Z}$, allora $y - x = 3(-h)$ con $-h \in \mathbb{Z}$. R gode della proprietà transitiva: se $x - y = 3h$ e $y - z = 3k$ allora $x - z = x - y + y - z = 3(h + k)$.
   $\mathbb{Z}/R := \{[x]_R, x \in \mathbb{Z}\}$. Diamone una descrizione esplicita: $[0]_R = \{x \in \mathbb{Z}$ t.c. x è divisibile per $3\} = \{3k$ t.c. $k \in \mathbb{Z}\}$; $[1]_R = \{3k + 1$ t.c. $k \in \mathbb{Z}\}$; $[2]_R = \{3k + 2$ t.c. $k \in \mathbb{Z}\}$. Dato che ogni intero ha resto o 0 o 1 o 2 nella divisione per 3, allora $\mathbb{Z}/R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R\}$.

   (b) R gode della proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva semplicemente perchè, definita $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $R = R_f$ (cfr. esempio 1.48 sul libro).
   $X/R = \{[(t, 0)]_R | t \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$ con $[(t, 0)] = \{(x_1, x_2) \in X | x_1^2 + x_2^2 = t^2\}$. Cioè: $X/R = \{C_t | t \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$ dove $C_t :=$ circonferenza in $\mathbb{R}^2$ di centro 0 e raggio t.

   (c) R non è una relazione di equivalenza dato che non gode della proprietà simmetrica: ad esempio $(1, 2) \in R$ ma $(2, 1) \notin R$.

   (d) R non è una relazione d'equivalenza dato che non gode della proprietà transitiva: ad esempio $(2, 6) \in R$, $(6, 9) \in R$ ma $(2, 9) \notin R$.

5. Sia R una relazione di equivalenza su un insieme X tale che $|X| = 12$ e $|X/R| = 3$, con due classi di equivalenza contenenti 5 elementi ciascuna. Calcolate $|R|$.

   Siano $[a]_R, [b]_R, [c]_R$ le tre distinte classi di equivalenza di R, con $a, b, c \in X$ e $|[a]_R| = |[b]_R| = 5$. Dato che le classi di equivalenza costituiscono una partizione di X si ha: $|X| = |[a]_R| + |[b]_R| + |[c]_R|$ da cui $|[c]_R| = 2$.

   Per definizione di relazione di equivalenza, in ogni classe di equivalenza ogni elemento è in relazione con se stesso e tutti gli altri. Quindi, ad esempio, $\forall x, y \in [a]_R, (x, y) \in R$. Inoltre nessun elemento di una data classe può essere in relazione con elementi delle altre classi. Quindi $|R| = 5^2 + 5^2 + 2^2 = 54$.