COGNOME .... *NOME* .... *MATRICOLA* ....

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 4 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

FIRMA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	TOT.
....										

1. Determinare tutte le soluzioni in $\mathbf{R}$ e in $\mathbf{C}$ dell'equazione $z^6 = 3$.

2. Determinare tutte le soluzioni del sistema di congruenze: $\begin{cases} X \equiv 3 \bmod 5 \\ X \equiv 2 \bmod 7 \end{cases}$ nell'intervallo $[10, 100]$.

3. Sia F_n l'n–esimo numero di Fibonacci (cioè $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$). Dimostrare per induzione (forte) che $F_n > (5/4)^n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

4. Calcolare il massimo comun divisore $(105, 39)$ e la relativa identità di Bezout.

5. Enunciare e dimostrare il piccolo Teorema di Fermat.

6. Dopo aver definito la nozione di campo, dimostrare esplicitamente che l'anello $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ non è un campo.

7. Consideriamo le seguenti permutazioni in S_7:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

a. Esprimere σ e τ come il prodotto di cicli disgiunti.
b. Calcolare la parità di σ e di τ.
c. Calcolare $\sigma^2 \cdot \tau$, τ^5, σ^{-1}.

8. Dopo aver dato la definizione di gruppo, si dia un esempio di gruppo abeliano infinito e una di gruppo non abeliano finito.

9. Sia φ la funzione di Eulero. Dopo averla definita, calcolare il calore $\varphi(60000)$ spiegando i dettaglio le proprietà utilizzate per svolgere il calcolo.