

COGNOME NOME MATRICOLA

Risolvere il massimo numero di esercizi accompagnando le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. *Inserire le risposte negli spazi predisposti. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Scrivere il proprio nome anche nell'ultima pagina.* 1 Esercizio = 4 punti. Tempo previsto: 2 ore. Nessuna domanda durante la prima ora e durante gli ultimi 20 minuti.

FIRMA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	TOT.
.....										

1. Per ogni $n \in \mathbf{N}$, sia $A_n = [\frac{1}{n}, n] \subset \mathbf{R}$. Determinare

$$\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n \quad \text{e} \quad \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{R} \setminus A_n$$

2. Dopo aver definito la nozione di partizione di un insieme, si consideri $X = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ e si descrivano tutte le possibili partizioni di X .

3. Sia $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$.

- i. Fornire un esempio di applicazione iniettiva e non suriettiva $f : Y \rightarrow X$;
- ii. Fornire un esempio di applicazione suriettiva e non iniettiva $f : X \rightarrow Y$;
- iii. Fornire un esempio di applicazione né suriettiva né iniettiva $f : X \rightarrow X$.

4. Sia X un insieme e $f : X \rightarrow X$ una funzione tale che $f \circ f \circ f = f$. Dimostrare che f è iniettiva se e solo se è suriettiva.

5. Dimostrare usando il metodo dell'induzione, che per ogni $n \in \mathbf{N}$ il numero $10^{n+1} + 3 \cdot 10^n + 5$ è divisibile per 9.

6. Dopo aver enunciato gli assiomi di Peano, dimostrare che se $A = \{n \in \mathbf{N} \mid \exists k \in \mathbf{N}, n = 3k\}$ e se $s : A \rightarrow A, n \mapsto n + 3$, allora $(A, 0, s)$ è un sistema di Peano.

7. Dopo aver enunciato le tre nozioni di infinità, dimostrare che un insieme X è infinito nel senso di Cantor se e solo se è in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.

8. Sia $X = \{a, b, c\}$ per ciascuna delle seguenti relazioni stabilire se sono riflessive, simmetriche, antisimmetriche, transitive:

$$R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c)\}, \quad R_2 = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}, \quad R_3 = \{(a, b), (b, a), (c, c)\}.$$

9. Considerare la seguente relazione in $\mathbf{N}_{>}$:

$$a \preceq b \iff \frac{a}{b} \in \mathbf{N}.$$

Dimostrare che \preceq è un ordine parziale. Dire se si tratta di un ordine totale e se esistono massimo e minimo. Costruire una catena rispetto a tale ordine formata da 7 elementi.