CAM - Complementi di Analisi Uno, a.a. 2003/04

Comm. Prof. Mario Girardi

Prova di Esame - 16 settembre 2004 [Soluzioni]

ESERCIZIO 1

Calcolare il seguente limite utilizzando lo sviluppo di Taylor.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2 \sin x}.$$

Soluzione. $-\dfrac{1}{3}$.

Sfruttiamo gli sviluppi in polinomi di Taylor per le funzioni trigonometriche; si ha:

$$\begin{aligned} x\cos x = x\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) &= x-\frac{x^3}{2}+o(x^3); \\ \sin x &= x-\frac{x^3}{6}+o(x^3); \\ x^2\sin x &= x^2(x+o(x)). \end{aligned}$$

Da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2 \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3+o(x^3)} = -\frac{1}{3}.$$

ESERCIZIO 2

Dire per quali α la funzione $f(x) := e^x - \alpha x^3$ è convessa.

Soluzione. f è convessa su tutta la retta reale se e solo se $0 \le \alpha \le \dfrac{e}{6}$.

Osserviamo che f è una funzione derivabile infinite volte con derivate continue. Quindi, il problema equivale a cercare per quali parametri reali α la funzione ha derivata seconda non negativa,

i.e. per quali α

$$f''(x) = e^x - 6\alpha x \ge 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Se $\alpha < 0$ la funzione non è convessa.

Infatti,

$$\lim_{x\to -\infty} (e^x - 6\alpha x) = -\infty.$$

Se $\alpha = 0 \;\; f(x) \equiv e^x$ è convessa.

Studiamo il caso $\alpha > 0$.
Subito, se $x \leq 0$ si vede che $e^x \geq 6\alpha x$. Resta da analizzare la disuguaglianza $f''(x) \geq 0$ per le x positive.
Poniamo
$$g(x) := \frac{e^x}{6x}$$
e vediamo per quali α
$$g(x) \geq \alpha, \quad \forall x \in (0, \infty).$$
Poiché g è continua in $(0, \infty)$ e $\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, allora ha un minimo in $(0, \infty)$.
Si ha
$$g'(x) = \frac{e^x}{6x^2}(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Ne segue che $g(1) = \dfrac{e}{6}$ è un minimo per g.

In definitiva, f è convessa su tutta la retta reale se e solo se $0 \leq \alpha \leq \dfrac{e}{6}$.

ESERCIZIO 3
Calcolare il seguente integrale indefinito: $\displaystyle\int \frac{(1-\sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}dx$.

Soluzione. $-\dfrac{2(\sqrt{1+x+x^2}-1)}{x} + \ln|2x + 2\sqrt{1+x+x^2}+1| + cost.$

Effettuiamo la sostituzione di Eulero: $\sqrt{1+x+x^2} = xt + 1$.
Da cui:
$$1 + x + x^2 = x^2t^2 + 2xt + 1,$$
$$x = \frac{2t-1}{1-t^2},$$
$$dx = \frac{2t^2 - 2t + 2}{(1-t^2)^2}dt.$$
Segue:
$$\sqrt{1+x+x^2} = \frac{t^2 - t + 1}{1-t^2},$$
$$1 - \sqrt{1+x+x^2} = \frac{-2t^2 + t}{1-t^2}.$$

Sfruttando le espressioni ottenute nell'integrale iniziale, otteniamo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{(1-\sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}dx &= \int \frac{(-2t^2+t)^2(1-t^2)^2(1-t^2)(2t^2-2t+2)}{(1-t^2)^2(2t-1)^2(t^2-t+1)(1-t^2)^2}dt \\
&= 2\int \frac{t^2}{1-t^2}dt \;=\; -2t+\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + cost \\
&= -\frac{2(\sqrt{1+x+x^2}-1)}{x} + \ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}-1}{x-\sqrt{1+x+x^2}+1}\right| + cost \\
&= -\frac{2(\sqrt{1+x+x^2}-1)}{x} + \ln|2x+2\sqrt{1+x+x^2}+1| + cost.
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 4

Dire se esiste ed in tal caso calcolare il valore dell'integrale improprio in $(-1,0)$ della seguente funzione: $f(x) = \dfrac{1}{(x-4)\sqrt{|x|}}$.

Soluzione. La funzione è integrabile e l'integrale in senso generalizzato vale $-\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

La funzione è integrabile in $(-1,b)$, per ogni $b<0$; calcoliamone l'integrale indefinito con un cambio di variabili.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x-4)\sqrt{-x}} &= 2\int \frac{dt}{t^2+4} \\
&= \arctan\left(\frac{t}{2}\right) \\
&= \arctan\left(\frac{\sqrt{-x}}{2}\right)
\end{aligned}$$

Ora, calcoliamo l'integrale in senso generalizzato; esiste ed è uguale a

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to 0^-}\int_{-1}^{b} \frac{dx}{(x-4)\sqrt{-x}} &= \lim_{b\to 0^-}\left[\arctan\left(\frac{\sqrt{-x}}{2}\right)\right]_{x=1}^{x=b} \\
&= \lim_{b\to 0^-}\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{-b}}{2}\right) - \arctan\left(\frac{\sqrt{1}}{2}\right)\right) \;=\; -\arctan\left(\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 5

Un triangolo rettangolo di ipotenusa data a viene fatto ruotare attorno ad uno dei due cateti per generare un cono circolare retto. Trovare il cono di volume massimo.

Soluzione. Il cono di volume massimo è quello di raggio di base $r = \sqrt{\dfrac{2}{3}}a$ ed altezza $h = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Ricordiamo che il volume di un cono circolare è dato da $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, dove r è il raggio della circonferenza di base ed h è l'altezza.

Indichiamo con x l'altezza del cono; segue (*Teorema di Pitagora*) $r = \sqrt{a^2 - x^2}$.
Scriviamo la funzione volume in funzione di x e troviamone il massimo.
Si ha:

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi(a^2 x - x^3).$$

Da cui

$$V'(x) = \frac{1}{3}\pi(a^2 - 3x^2),$$

che è positiva per in $(0, \frac{a}{\sqrt{3}})$ e negativa in $(\frac{a}{\sqrt{3}}, \infty)$.

Segue che il volume massimo si ha per $h = x = \frac{a}{\sqrt{3}}$ e $r = \sqrt{\frac{2}{3}}a$.