Continuitá e uniforme continuitá

Manuela Grella e Simona Giovannetti

7 marzo 2005

Esercizio 1. Determinare a e b in modo che

$$f(x) : (-1,1) \to R$$

definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^a sen^2(x) & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \mid x \mid^b cos^2(1/x) & \text{se } -1 < x < 0 \end{cases}$$

sia continua

Esercizio 2. Dire se la funzione $tg(x)$ é continua in $x = \pi/2$

Esercizio 3. Stabilire se la funzione segno $f(x) = \frac{x}{|x|}$ é continua in $x = 0$ e, se discontinua, dire di che discontinuitá si tratta.

Esercizio 4. Stabilire se la funzione $f(x) = \frac{sen(x)}{x}$ é continua in $x = 0$, e nel caso non lo sia dire se la discontinuitá é eliminabile.

Esercizio 5. Dire se le seguenti funzioni sono uniformemente continue:

(i) $f(x) = e^x \quad se \quad x \in (-\infty, 1);$

(ii) $f(x) = x^2 ln(\frac{1+x^2}{x^2})$ se $x \in [1, \infty), \quad [1,2], \quad (0,1];$

(iii) $f(x) = arctan(1/x) \quad se \quad x \in (-1,0) \cup (0,1).$

Esercizio 6. Sia $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polinomio a coefficienti reali di grado pari;se $a_0 < 0$ e $a_n > 0$ dimostrare che P(x) ammette almeno due radici, una positiva e una negativa.

Esercizi per casa

Esercizio 7. Verificare se le seguenti funzioni sono uniformemente continue:

(i) $f(x) = \frac{xe^x}{|x|}$ se $x \in [-1, 0)$;

(ii) $f(x) = x \log x$ se $x \in (0, 3]$;

(iii) $f(x) = \sqrt{x}$ se $x \in [0, \infty)$;

(iv) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ se $x \in [1, \infty)$;

(v) $f(x) = x + \frac{\sin x^2}{x}$ se $x \in [1, \infty)$.

Esercizio 8. Dire se le seguenti funzioni sono continue, individuerne le eventuali discontinuitá e dove possibile eliminarle:

(i) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ per $x = 0$;

(ii) $f(x) = \frac{x^2+x-2}{2x^2+x-3}$ su $\mathbf{R}$;

(iii) $f(x) = \frac{e^x-1}{x}$ su $\mathbf{R}$;

(iv) $f(x) = \frac{2x}{\sin 3x}$ su $\mathbf{R}$;

(v) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x > 0 \\ 1 + x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

Esercizio 9. Determinare per quali valori di a le seguenti funzioni sono continue:

(i) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \forall\ x \geq 0 \\ ax - 3 & \forall\ x < 0 \end{cases}$ in $\mathbf{R}$;

(ii) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2ax + a & \forall\ x > 0 \\ \sqrt{x+2} & \forall\ x \in [-2, 0] \end{cases}$ in $x = 0$.