Simulazione di esonero di CAM

(le soluzioni verranno fornite e spiegate durante l'esercitazione del 5 aprile p.v.)

Giustificare tutte le affermazioni

Esercizio 1.
Data la funzione:

$$f(x) = \arctan \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$$

Determinarne: insieme di esistenza, limiti ed eventuali asintoti, massimi e minimi relativi, e tracciarne un grafico approssimativo.

Insieme di esistenza: $(-\infty, 1] \cup (2, +\infty)$. Limiti:
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$,
$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$.
Derivata:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-2)(2x-3)2\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}}$$

la derivata é positiva per $x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.

Esercizio 2.
Dire se le seguenti funzioni sono uniformemente continue nei domini indicati:

$$f(x) = \sin x^2 \quad x \in [\pi, 2\pi],\ x \in [\pi, +\infty)(\text{difficile...})$$

$$g(x) = \left(1 + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}\right)^{\cot\frac{1}{x}},\ x \in [5, +\infty)$$

La funzione $f(x)$ ' continua, quindi u.c. nel compatto $[\pi, 2\pi]$. Nel secondo insieme, che invece non é compatto, f non é u.c. e si dimostra a partire dalla definizione. Si deve dimostrare che:

$$\exists \varepsilon > 0 :\ \forall \delta > 0 \text{ tale che scelti } x_\delta, y_\delta : |x_\delta - y_\delta| < \delta, |f(x_\delta) - f(y_\delta)| > \varepsilon.$$

Ovvero, troviamo due punti la cui distanza tenda a zero ma tali che la distanza delle immagini rimanga maggiore di un numero positivo. Sia $\delta = \frac{1}{n}$, $x_\delta = x_n = \sqrt{2\pi n}, y_\delta = y_n = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$. Si ha immediatamente che

$$|f(x_n) - f(y_n)| = 1$$

quindi sceglieremo $\varepsilon = 1$. E del resto

$$|x_n - y_n| \to 0,$$

dove per fare l'ultimo limite si deve razionalizzare la quantitá $\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} - \sqrt{2\pi n}$ per rimuovere la forma indeterminata.
Infine la funzione $g(x)$ é u.c. perché il limite per $x \to +\infty$ esiste ed é finito.

Esercizio 3.
Un triangolo rettangolo di ipotenusa data viene fatto ruotare attorno a uno dei due cateti per generare un cono circolare retto. Si trovi il cono di volume massimo. (Volume cono $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$).

Sia a l'ipotenusa , x un cateto, $\sqrt{a^2 - x^2}$ l'altro cateto (coincidente con il raggio della circonferenza di base).

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi(a^2 - x^2)x, \; V'(x) = \frac{1}{3}\pi a^2 - \pi x^2.$$

La funzione ha un minimo per $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Esercizio 4.
Sia f continua e derivabile due volte in (a, b), con derivata prima continua. Supponiamo che esista un punto $c \in (a, b)$ tale che $f(a) = f(b) = f(c)$. Dimostrare che esiste $y \in (a, b)$ tale che $f''(y) = 0$.

Applichiamo il teorema di Rolle agli intervalli $(a, b), (b, c)$ e deduciamo che esistono due punti $x_1 \in (a, b)$, $x_2 \in (b, c)$ tali che $f'(x_0) = 0 = f'(x_1)$. Quindi applichiamo di nuovo il teorema di Rolle alla derivata di f nell'intervallo (x_0, x_1), siamo nelle ipotesi del teorema, infatti f' ha lo stesso valore agli estremi dell'intervallo. Otteniamo che esiste un punto $x_3 \in (x_0, x_1)$ tale che $f''(x_3) = 0$.

Esercizio 5.
Dare le seguenti definizioni: funzione uniformemente continua, funzione di classe C^k, funzione derivabile. Enunciare il Teorema di Rolle.