Integrali II

Manuela Grella & Simona Giovannetti

26 aprile 2005

Soluzione 1. (i)$\int \frac{3x+1}{x^3-4x}dx$: poiché $x^3 - 4x = x(x-2)(x+2)$, la funzione integranda può essere decomposta come segue:

$$\frac{3x+1}{x^3-4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} = \frac{Ax^2 - 4A + Bx^2 + 2Bx + Cx^2 - 2Cx}{x^3 - 4x}$$

Poiché questo deve valere per ogni x, si ha:

$$\begin{cases} A+B+C=0 & \text{(ossia i coefficienti di } x^2\text{)} \\ 2B-2C=3 & \text{(ossia i coefficienti di } x\text{)} \\ -4A=1 & \text{(ossia i termini noti)} \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ricava che $A = -\frac{1}{4}$, $B = \frac{7}{8}$ e $C = -\frac{5}{8}$, quindi:

$$\int \frac{3x+1}{x^3-4x}dx = -\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x} + \frac{7}{8}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{5}{8}\int \frac{dx}{x+2} =$$
$$= -\frac{1}{4}\ln|x| + \frac{7}{8}\ln|x-2| - \frac{5}{8}\ln|x+2| + c$$

(ii) Poiché il grado del numeratore supera quello el denominatore, conviene dividere il primo per il secondo: otteniamo che $x^5 - 6x^3 + 2x^2 + 5 = (x^3 + 3x^2 - x - 3)(x^2 - 3x + 4) - 10x^2 - 5x + 17$; andando a sostituire questo risultato nell'integrale e semplificando otteniamo:

$$\int \frac{x^5 - 6x^3 + 2x^2 + 5}{x^3 + 3x^2 - x - 3}dx = \int (x^2 - 3x + 4)dx - \int \frac{10x^2 + 5x - 17}{x^3 + 3x^2 - x - 3}dx =$$
$$= \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x - \int \frac{10x^2 + 5x - 17}{x^3 + 3x^2 - x - 3}dx$$

Ora calcoliamo il secondo integrale: poiché $x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x-1)(x+1)(x+3)$, la funzione integranda può essere decomposta come segue:

$$\frac{10x^2 + 5x - 17}{x^3 + 3x^2 - x - 3} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+3)}$$

Facendo il minimo comune multiplo, e risolvendo il sistema come sopra ottengo i seguenti valori: $A = -\frac{1}{4}$, $B = 3$ e $C = \frac{29}{4}$, quindi l'integrale iniziale avrà soluzione:

$$\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 4x + \frac{1}{4}\ln|x-1| - 3\ln|x+1| - \frac{29}{4}\ln|x+3|$$

(iii)$\int \frac{dx}{x^3(x^2+1)^2}$: $\frac{1}{x^3(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx+E}{x^2+1} + \frac{Fx+G}{(x^2+1)^2}$; risolvendo il sistema che ne viene si ottiene che $A = -2$, $B = 0$, $C = 1$, $D = 2$, $E = 0$ $F = 1$ e $G = 0$, quindi si ha:

$$\int \frac{dx}{x^3(x^2+1)^2} = -2\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^3} + \int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx =$$

$$= -2\ln|x| - \frac{1}{2x^2} + \ln(x^2+1) - \frac{1}{2(x^2+1)} + c = -\frac{2x^2+1}{2x^2(x^2+1)} + \ln\frac{x^2+1}{x^2} + c.$$

(iv)$\int \frac{\cot x}{\sin^\alpha x}dx = \int \frac{\cos x}{\sin^{\alpha+1}}dx = -\frac{1}{\alpha \sin^\alpha} + c$, essendo un integrale del tipo $\int f'(x)f^\alpha(x)dx$.

(v)$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}dx$: ponendo $t = \sqrt{e^x - 1}$ si ottiene $e^x = t^2 + 1$, quindi $dx = \frac{2t}{t^2+1}$; sostituendo ciò nell'integrale abbiamo

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}dx = \int \frac{(t^2+1)^2}{t}\frac{2t}{t^2+1} = \frac{2}{3}\sqrt{(e^x-1)^3} + 2\sqrt{e^x-1} + c$$

.

(vi)$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}dx = \frac{2}{3}\int \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}dx = \frac{2}{3}\ln|1 + x\sqrt{x}| + c$, essendo $\frac{2}{3}\sqrt{x}$ la derivata di $1 + x\sqrt{x}$, e quindi l'integrale del tipo $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$.

(vii)$\int \frac{\cos \ln x^n}{x}dx = \frac{1}{n}\int \frac{n}{x}\cos(n\ln x)dx = \frac{1}{n}\sin(n\ln x) + c$, risultato ottenuto considerando che $(n\ln x)' = \frac{n}{x}$, e quindi l'integrale è del tipo $\int f'(x)\sin(f(x))dx$.

(viii)$\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \arctan e^x + c$, poiché l'integrale è del tipo $\int f'(x)\frac{1}{1+(f(x))^2}dx$.

(ix)$\int e^{-x^2+\ln x}dx = \int e^{\ln x}e^{-x^2}dx = \int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$, essendo l'integrale del tipo $\int f'(x)e^{f(x)}dx$.

(x)$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{dx}{\frac{\sin x}{\cos x}\cos^2 x} = \int \frac{1}{\tan x}\frac{1}{\cos^2 x}dx = \ln|\tan x| + c$, avendo notato che $\frac{1}{\cos^2 x} = (\tan x)'$, e che quindi l'integrale è della forma $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$

Soluzione 2. Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo $[a, b]$. Il **teorema fondamentale del calcolo integrale** stabilisce che la seguente *funzione integrale*

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\ dt \qquad (\text{con } x_0 \in [a, b])$$

è derivabile in $[a, b]$ (in particolare $F(x)$ è una funzione continua) e la derivata vale $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.

(i) Fissiamo un numero reale x_0, la funzione integrale $F(x)$ si può rappresentare nella forma

$$F(x) = \int_{2x}^{x_0} \cos^2 t\ dt + \int_{x_0}^{3x} \cos^2 t\ dt = \int_{x_0}^{3x} \cos^2 t\ dt - \int_{x_0}^{2x} \cos^2 t\ dt$$

In base al teorema fondamentale del calcolo integrale, la derivata vale $F'(x) = 3\cos^2(3x) - 2\cos^2(2x)$

(ii) Consideriamo la funzione integrale $F(x)$ composta tramite le due funzioni $y = \sqrt{x}$ e $G(y) = \int_0^y e^{t^2} dt$, ossia $F(x) = G(\sqrt{x})$.
La derivata della funzione $G(y)$, in base al teorema fondamentale del calcolo integrale, vale $G'(y) = e^{y^2}$. Per la regola di derivazione delle funzioni composte otteniamo:

$$F'(x) = G'(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{x}$$

Soluzione 3. (i) Per la monotonia dobbiamo considerare la derivata prima della $F(x)$, che si calcola applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale: per cui abbiamo che $F'(x) = 1 - \frac{\sin^2 x}{x^2}$ per $x > 0$. Essendo $|\sin x| < |x|\ \forall\ x \neq 0$, risulta $F'(x) > 0\ \forall\ x > 0$. Perciò $F(x)$ è strettamente crescente nell'intervallo $(0, +\infty)$.

(ii) Per lo studio dei punti di flesso abbiamo bisogno della derivata seconda: $F''(x) = -\frac{2\sin x}{x^3}(x\cos x - \sin x)$. Essa esiste per $x \neq 0$ e si annlla se $\sin x = 0$, oppure se $\tan x = x$. L'equazione $\tan x = x$ non ha soluzioni nell'intervallo $(0, \pi)$, poiché per $0 < x < \pi/2$ risulta $\tan x > x$, mentre per $\pi/2 < x < \pi$ si ha che $\tan x < 0 < x$. Dato che l'equazione $\sin x = 0$ non ha soluzioni nell'intervallo aperto $(0, \pi)$, la $F(x)$ non ha punti di flesso lì.