Integrali

Manuela Grella & Simona Giovannetti

26 aprile 2005

Soluzione 1. (i)$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c.$

(ii)$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c.$

(iii)$\int \sin x dx = -\cos x + c.$

(iv)$\int \frac{1}{cos^2 x} dx = \tan x + c.$

(v)$\int \frac{1}{sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{sin^2 x \cos^2 x} dx = \tan x - \cot x + c$

(vi)$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$

(vii)$\int (2e^x - 5\cos x) dx = 2e^x - 5\sin x + c$

(viii)$\int a^x dx = a^x \log_a e + c = \frac{a^x}{\ln a} + c$

(ix)$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c.$

(x)$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$

(xi)$\int (x^3 - 4x^2 + \frac{3}{5}x + 2) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{10}x^2 + 2x$

(xii)$\int \frac{x^5+1}{x+1} = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c$

(xiii)$\int \frac{3x+1}{x^3-4x} dx$: poiché $x^3 - 4x = x(x-2)(x+2)$, la funzione integranda può essere decomposta come segue:

$$\frac{3x+1}{x^3-4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} = \frac{Ax^2 - 4A + Bx^2 + 2Bx + Cx^2 - 2Cx}{x^3 - 4x}$$

Poiché questo deve valere per ogni x, si ha:

$$\begin{cases} A + B + C = 0 & \text{(ossia i coefficienti di } x^2\text{)} \\ 2B - 2C = 3 & \text{(ossia i coefficienti di } x\text{)} \\ -4A = 1 & \text{(ossia i termini noti)} \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ricava che $A=-\frac{1}{4}$, $B=\frac{7}{8}$ e $C=-\frac{5}{8}$, quindi:

$$\int \frac{3x+1}{x^3-4x}dx = -\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x}+\frac{7}{8}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{5}{8}\int\frac{dx}{x+2}=$$
$$=-\frac{1}{4}\ln|x|+\frac{7}{8}\ln|x-2|-\frac{5}{8}\ln|x+2|+c$$

(xiv) Poiché il grado del numeratore supera quello el denominatore, conviene dividere il primo per il secondo: otteniamo che $x^5-6x^3+2x^2+5=(x^3+3x^2-x-3)(x^2-3x+4)-10x^2-5x+17$; andando a sostituire questo risultato nell'integrale e semplificando otteniamo:

$$\int \frac{x^5-6x^3+2x^2+5}{x^3+3x^2-x-3}dx=\int(x^2-3x+4)dx-\int\frac{10x^2+5x-17}{x^3+3x^2-x-3}dx=$$
$$=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+4x-\int\frac{10x^2+5x-17}{x^3+3x^2-x-3}dx$$

Ora calcoliamo il secondo integrale: poiché $x^3+3x^2-x-3=(x-1)(x+1)(x+3)$, la funzione integranda può essere decomposta come segue:

$$\frac{10x^2+5x-17}{x^3+3x^2-x-3}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{C}{(x+3)}$$

Facendo il minimo comune multiplo, e risolvendo il sistema come sopra ottengo i seguenti valori: $A=-\frac{1}{4}$, $B=3$ e $C=\frac{29}{4}$, quindi l'integrale iniziale avrà soluzione:

$$\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+4x+\frac{1}{4}\ln|x-1|-3\ln|x+1|-\frac{29}{4}\ln|x+3|$$

(xv)$\int\frac{dx}{x^3(x^2+1)^2}$: $\frac{1}{x^3(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{Dx+E}{x^2+1}+\frac{Fx+G}{(x^2+1)^2}$; risolvendo il sistema che ne viene si ottiene che $A=-2$, $B=0$, $C=1$, $D=2$, $E=0$ $F=1$ e $G=0$, quindi si ha:

$$\int\frac{dx}{x^3(x^2+1)^2}=-2\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x^3}+\int\frac{2x}{x^2+1}dx+\int\frac{x}{(x^2+1)^2}dx=$$

$$=-2\ln|x|-\frac{1}{2x^2}+\ln(x^2+1)-\frac{1}{2(x^2+1)}+c=-\frac{2x^2+1}{2x^2(x^2+1)}+\ln\frac{x^2+1}{x^2}+c$$

Soluzione 2. (i)Eseguendo la sostituzione $x=t^2$ si ha $t=\sqrt{x}$ e $dx=2tdt$ quindi l'integrale diventa $2\int\frac{t^2}{2+t}dt$,effettuando la divisione tra polinomi,si ha

$$2\int(t-2)dt+8\int\frac{dt}{2+t}=t^2-4t+8ln|2+t|+c$$

(ii)La sostituzione da fare é $2^x - 1 = t^2$,da cui $x = log_2(1+t^2)$ e $dx = \frac{2t}{(t^2+1)ln2}dt$.Otteniamo quindi

$$\frac{2}{ln2}\int \frac{t^2}{t^2+1}dt$$

che si risolve con la divisione tra polinomi; il risultato é

$$\frac{2}{ln2}[\sqrt{2^x-1} - arctg2^x - 1] + c$$

(iii)Si puó procedere notando che l'integrale é del tipo $-\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx$ con $f(x) = cosx$ da cui si trova il risultato $-arctgcosx + c$;altrimenti si puó eseguire la sostituzione $tg(x/2) = t$ e ci si riconduce al calcolo dell'integrale

$$\int \frac{2t}{t^4+1}dt$$

(iv)Ponendo $e^x = t$ si ottiene il risultato $x - ln(1+e^x) + c$.

(v)Ponendo $t = \sqrt{x+4}$ si ha $x = t^2 - 4$ e $dx = 2tdt$,l'integrale diventa

$$1/2\int \frac{4}{t^2-4}dt$$

Il risultato finale é

$$1/2ln|\sqrt{x+4} - 2| - 1/2ln(\sqrt{x+4} + 2) + c$$

(vi)Si pone $\tan x = t$, quindi $x = arctgt$,$dx = \frac{dt}{1+t^2}$,$sen^2x = \frac{t^2}{1+t^2}$; il risultato é $1/4ln(1+2tg^2x) + c$.

(vii) Poniamo $x + \sqrt{x^2+1} = t$, dalla quale ricaviamo che $x = \frac{t^2-1}{2t}$, per cui $dx = \frac{2t^2+1}{4t^2}dt$. Pertanto otteniamo:

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{2t^2+1}{4t^3}dt = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} + \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^3}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t| - \frac{1}{8}\frac{1}{t^2} + c = \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+1}| - \frac{1}{8(x+\sqrt{x^2+1})} + c$$

(viii) Notiamo che $-x^2 - 2x + 3 = (x+3)(1-x)$, per cui abbiamo che

$$\frac{1}{\sqrt{-x^2-2x+3}} = \frac{1}{\sqrt{(x+3)(1-x)}} = \frac{1}{(x+3)\sqrt{\frac{1-x}{x+3}}}$$

Poniamo $t = \sqrt{\frac{1-x}{x+3}}$, dalla quale otteniamo $x = \frac{1-3t^2}{1+t^2}$: quindi $dx = \frac{-8t}{(1+t^2)^2}$ e $x+3 = \frac{4}{1+t^2}$. Detto ciò si ha:

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-2x+3}}dx = \int \frac{1}{(x+3)\sqrt{\frac{1-x}{x+3}}}dx = -2\int \frac{1}{1+t^2}dt =$$

$$= -2\arctan t + c = -2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{x+3}} + c$$

Soluzione 3. Applichiamo la formula dell'integrazione per parti:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

(i) Consideriamo $u = x$ e $dv = \sin x$: applicando la formula su scritta otteniamo $\int x\sin xdx = -x\cos x + \int \cos xdx = -x\cos x + \sin x + c$

(ii) Consideriamo $u = \sqrt{1-x^2}$ e $dv = dx$: allora otteniamo $\int \sqrt{1-x^2}dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2+1-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x - \int \sqrt{1-x^2}dx + c$; portando dall'altra parte dell'uguale l'integrale ottenuto, si ha che:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x}{2} + c_1$$

(iii) Consideriamo $u = \sin x$ e $dv = e^{-x}$: allora otteniamo $\int \frac{\sin x}{e^x} = -e^{-x}\sin x + \int \cos xe^{-x}dx$; ora riapplichiamo il metodo dell'integrazione per parti con $u = \cos x$ e $dv = e^{-x}$, e abbiamo che $-e^{-x}\sin x + \int \cos xe^{-x}dx = -e^{-x}\sin x - \cos xe^{-x} - \int e^{-x}\sin xdx + c$: considerando l'uguaglianza di quest'ultima formula con l'integrale iniziale otteniamo che:

$$\int \frac{\sin x}{e^x} = \frac{-e^{-x}(\sin x + \cos x)}{2} + c_1$$

(iv) Consideriamo $u = x$ e $dv = \frac{1}{\cos^2 x}$: allora otteniamo $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx = x\tan x - \int \tan xdx$; quest'ultimo integrale è della forma $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$, quindi otteniamo che $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx = x\tan x - \ln|\cos x| + c$.

(v) Consideriamo $u = \arcsin^2 x$ e $dv = dx$: quindi otteniamo $\int \arcsin^2 xdx = x\arcsin^2 x - \int \frac{2x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; ora riapplichiamo il metodo dell'integrazione per parti con $u = \arcsin x$ e $dv = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, e abbiamo che $x \arcsin^2 x - \int \frac{2x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin^2 x + 2 \arcsin x \sqrt{1-x^2} - 2x + c$

(vi) Consideriamo $u = \sqrt{x^2+4}$ e $dv = dx$: allora otteniamo $\int \sqrt{x^2+4}dx = x\sqrt{x^2+4} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx = x\sqrt{x^2+4} - \int \frac{x^2+4-4}{\sqrt{x^2+4}}dx = x\sqrt{x^2+4} - \int \sqrt{x^2+4}dx + 4\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$; poiché $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} = \ln|\sqrt{x^2+4}+x| + c$ (ottenuto per sostituzione), allora si ottiene:

$$\int \sqrt{x^2+4}dx = \frac{x\sqrt{x^2+4} + 4\ln|\sqrt{x^2+4}+x|}{2} + c_1$$

(vii) Consideriamo $u = e^x$ e $dv = \sin x$: allora abbiamo che $\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx$; riapplicando lo stesso metodo otteniamo: $-e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$, e riportando al primo membro l'integrale rimasto otteniamo che $\int e^x \sin x \, dx = \frac{-e^x \cos x + e^x \sin x}{2} + c$

(viii) Consideriamo $u = \sin^3 x$ e $dv = e^x$: allora abbiamo che $\int e^x \sin^3 x \, dx = \sin^2 x \cos x e^x - 3\int \sin^2 x \cos x e^x dx$; calcoliamo ora a parte l'integrale rimasto: considerando $u = \sin^2 x \cos x$ e $dv = e^x$, si ha che $\int \sin^2 x \cos x e^x dx = \sin^2 x \cos x e^x - \int (2 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x) e^x dx = \sin^2 x \cos x e^x - 2\int \sin x e^x dx + 3\int \sin^3 x e^x dx$; notiamo che il primo integrale lo abbiamo risolto nel puto precedente; quindi, andando a sostituire il risultato ottenuto nell'espressione precedente e portando al primo membro l'integrale rimasto otteniamo che:

$$\int e^x \sin^3 x \, dx = \frac{e^x}{10}(\sin^3 x - 3\sin^2 x \cos x + 3 \sin x - 3 \cos x)$$

(ix) Consideriamo $u = \ln x$ e $dv = dx$; allora otteniamo $\int \ln x \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c$

(x) Consideriamo $u = \sin^2 x$ e $dv = \sin x$; allora otteniamo che $\int \sin^3 x \, dx = -\cos x \sin^2 x + 2\int \cos^2 x \sin x \, dx = -\cos x \sin^2 x + 2\int \sin x \, dx - 2\int \sin^3 x \, dx = -\cos x \sin^2 x + 2 \cos x - 2\int \sin^3 x \, dx + c$; quindi portando al primo membro l'integrale rimasto otteniamo che

$$\int \sin^3 x \, dx = \frac{-\cos x \sin^2 x - 2 \cos x}{3} + c_1$$