Soluzioni tutorato1

Manuela Grella e Simona Giovannetti

23 marzo 2005

Soluzione 1. L'usuale dimostrazione del teorema di Rolle non può essere usata perchè non siamo su un insieme compatto.
Supponiamo che a ed $f(a)$ siano positivi (condizione che non é restrittiva!). Se la funzione é costante la proposizione è banalmente verificata, quindi supponiamo che f non sia costante: allora esisterà un punto $x_1 > a$ tale che $f(x_1) \neq f(a)$, ad esempio $f(x_1) > f(a)$. D'altra parte, dalla definizione di limite deduciamo che

$$\forall \epsilon > 0,\ esisteM > 0 : f(x) \in (f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon) \forall x > M$$

e, poiché è vero per ogni ϵ possiamo sceglierlo abbastanza piccolo(di conseguenza M sarà molto grande) in modo che

$$(*) \qquad f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon < f(x_1), x > M$$

Sia x_2 un punto che verifica (*). Dato che la funzione è continua, per il Teorema dei valori intermedi, esisterà $x_3 \in (x_1, x_2)$ tale che $f(x_3) = f(a)$.A questo punto possiamo applicare il Teorema di Rolle nel compatto $[a, x_3]$, nel quale f assume gli stessi valori negli estremi e quindi concludere che esiste $x_4 \in (a, x_3)$ sottoinsieme di $(a, +\infty)$ tale che $f'(x_4) = 0$.

Soluzione 2. Per provare queste disuguaglianze si possono usare i seguenti criteri:

(a) Siano $f(x),\ g(x)$ due funzioni continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b). Supponendo che $f(a) \geq g(a)$ e che $f'(x) \geq g'(x)$ per ogni $x \in (a, b)$, si ha che $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in [a, b]$.

(b) Siano $f(x),\ g(x)$ due funzioni continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b). Supponendo che $f'(x) \geq g'(x)\ \forall x \in [a, b]$ e che $f(x_0) = g(x_0)$ per qualche punto $x_0 \in (a, b)$, allora si ha che: $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in [x_0, b]$ e $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a, x_0]$

(c) Siano $f(x),\ g(x)$ due funzioni derivabili in (a, b) e sia x_0 un punto di (a, b). Supponendo che $f'(x) \geq g'(x)\ \forall x \in (x_0, b)$, $f'(x) \leq g'(x)\ \forall x \in (a, x_0)$

e che $f(x_0) = g(x_0)$, allora si ha che $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in (a, b)$.

(i) Si può usare il criterio (c) con $x_0 = 0$ ponendo $f(x) = e^x$ e $g(x) = 1+x$. Un altro metodo consiste nel porre $h(x) = e^x - (1 + x)$: questa funzione ha un minimo assoluto in $x = 0$: infatti la derivata si annulla per $x = 0$, è positiva per $x > 0$, è negativa per $x < 0$. Perciò $h(x) \geq h(0) = 0$, cioè $e^x - (1 + x) \geq 0$, per ogni $x \in \mathbf{R}$.

(ii) Le derivate delle due funzioni valgono $f'(x) = \frac{x}{4}$ e $g'(x) = \frac{2x(x+1)^2}{(x+1)^4} - \frac{2(x+1)x^2}{(x+1)^4} = \frac{2x}{(x+1)^3}$.
Per $x > 0$ risulta $f'(x) \geq g'(x)$ se e solo se $(x+1)^3 \geq 8$ se e solo se $x+1 \geq 2$ se e solo se $x \geq 1$. Essendo $f(1) = g(1) = 1/4$, la disuguaglianza segue dal criterio (c).

(iii) La derivata della funzione è $f'(x) = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$ e si annulla per $x = 1$, è positiva per $x > 1$ e negativa per $0 < x < 1$. Perciò, il punto $x = 1$ è di minimo assoluto per $f(x)$ nell'intervallo $(0, +\infty)$. Per $x > 0$ risulta quindi $f(x) \geq f(1) = 2$.

Soluzione 3. Il dominio della funzione è $\mathbf{R}$-$\{0\}$.
Semplificando in base alle proprietà del logaritmo e del valore assoluto, si ottiene per ogni $x \neq 0$ $f(x) = x - \ln|x^2 - 1|$.
La funzione tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$ e a $-\infty$ per $x \to -\infty$. Le rette di equazioni $x = 1$ e $x = -1$ sono asintoti verticali e non ci sono altri asintoti.
Le derivate valgono

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 - 1} \qquad f''(x) = 2\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$$

La derivata prima si annulla per $x = 1 + \sqrt{2}$ e per $x = 1 - \sqrt{2}$ che sono punti di minimo relativo. La derivata seconda, quando è definita, è positiva.
Si noti la discontinuità per $x = 0$.

Soluzione 4. (i) La derivata della funzione è $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$, che si annulla in $x = 0$ e $x = 2$; poiché $f'(x) > 0$ per $x < 0$ e per $x > 2$, e $f'(x) < 0$ altrimenti, allora (studiando la crescenza e la decrescenza della funzione) si ha che $x = 0$ è un punto di massimo relativo e $x = 2$ è un punto di minimo relativo.

(ii) La derivata della funzione è $f'(x) = \frac{e^x(x^2-2x)}{x^4}$, che si annulla per $x = 0$ e per $x = 2$, ma $x = 0$ non va considerato dal momento che la funzione $f(x)$ non è definita in 0. $f'(x) \geq$ se e solo se $x^2 - 2x \geq 0$, ossia per $x \leq 0$ e per $x \geq 2$, quindi $x = 2$ è un punto di minimo relativo della funzione.

Soluzioni sercizi per casa

Soluzione 5. La funzione é definita solo per gli x t.c. $\sqrt{x} - x > 0$ cioé per $x \in (0,1)$;la derivata prima é $f'(x) = \frac{1-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-x)(2\sqrt{x})}$ che ,nel dominio, si azzera solo per $x = 1/4$;f'(x) é positiva prima di 1/4 e negativa dopo,quindi per $x = 1/4$ si ha un punto di massimo,precisamente il punto di coordinate $(1/4, ln(1/2 - 1/4))$.

Soluzione 6. (i)la funzione é definita su tutto $\mathbf{R}$; la derivata prima é $f'(x) = 1 + \frac{2}{3x^{1/3}}$ che é definita su tutti gli $x \neq 0$ e si azzera nel suo dominio in $x = -8/27$ in prossimitá del quale si ha un punto di massimo relativo;in $x = 0$ la funzione non é derivabile ,ma si verifica con la definizione che si tratta di un punto di minimo relativo.Non ci sono massimi e minimi assoluti perché $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

(ii)la funzione é definita per $x > 0$,la derivata prima vale $f'(x) = ln^2x + 2logx$ e si azzera nei punti $x = 1$ e $x = e^{-2}$, in prossimitá dei quali si ha un massimo e un minimo relativi.In particolare per $x = 1$ si ha un minimo assoluto perché $f(x) = xlog^2x > 0 = f(1)$;non si ha invece massimo assoluto perché $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

(iii)la funzione é definita quando $senx > 0$ cioé se $0 < x \leq \pi/2$ con la sua periodicitá; $f'(x) = \frac{cosx}{senx}$ che si azzera in tutti i punti del tipo $\pi/2 + 2k\pi$ che sono tutti punti di massimo,in particolare massimi assoluti perché $f(x) < 0 = f(\pi/2 + 2k\pi)$,non c'é minimo relativo perché $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

(iv)la funzione noné derivabile per $x = -3$; la derivata vale 1 se $x > -3$ e -1 se $x < -3$;quindi non si annulla mai;non ho massimi o minimi relativi,ma$f(x) \geq 0 = f(-3)$,quindi ho il massimo assoluto in $x = -3$.

Soluzione 7. La funzione é definita per tutti gli $x \neq 2$,cioé il dominio é $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$;é negativa in $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2)$ e positiva nei rimanenti intervalli del dominio;le intersezioni con gli assi sono i punti di coordinate $(0, 3/2), (-\sqrt{3}, 0)e(\sqrt{3}, 0)$;si hanno due asintoti verticali per $x = 2$ e un asintoto obliquo di equazione $y = x + 2$;la derivata é $f'(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}(x-2)^2$,definita per $x \neq 2$,essa si azzera in $x = 1$ e $x = 3$,dal segno deduciamo che il punto $(1, 2)$ é un massimo e $(3, 6)$ un minimo.