Soluzioni Tutorato2

Manuela Grella e Simona Giovannetti

1 marzo 2005

Esercizio 1. (i)$f(x) = senx$ é uniformemente continua su R perché ha derivata limitata su tutto l'asse reale; infatti $f'(x) = \cos(x)$ e $|\cos(x)| \geq 1$ $\forall x \in \mathbf{R}$.

(ii)$f(x) = x^3$ non é u.c; infatti se lo fosse per il Lemma della farfalla dovrebbero esistere $A, B \in \mathbf{R}$ t.c. $|x^3| \leq Ax + B$, e quindi si avrebbe che $\frac{|x^3|}{Ax+B} \leq 1$ $\forall x$; ma $\lim_{x\to+\infty} \frac{|x^3|}{Ax+B} = +\infty$, quindi la disuguaglianza non puó valere.

(iii)$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ é u.c. in $[a, +\infty)$ con $a > 0$, perché la sua derivata in questo insieme é limitata (in particolare é minore di 1).

Esercizio 2. (i)$f(x) = \ln|\tan\frac{x}{2}|$ ha delle discontinuitá di seconda specie nei punti del tipo $x = k\pi$ $\forall$ $k \in \mathbf{Z}$, poiché in questi punti la tangente si annulla e $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

(ii)$f(x) = \ln(\cos x)$ é definita solo dove il coseno é positivo, quindi in tutti gli intervalli del tipo $k\pi + \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \frac{3}{2}\pi$, con k dispari, e in essi la funzione $f(x)$ é continua. Nei punti del tipo $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ sono punti di discontinuitá di seconda specie.

(iii)$f(x) = e^{\frac{1}{x+1}}$ é continua su $\mathbf{R}$-$\{-1\}$. Infatti su $x \neq -1$ $f(x)$ é continua perché composizione di funzioni continue, ossia l'esponenziale e $\frac{1}{x+1}$. In -1 si ha che $\lim_{x\to-1^-} e^{\frac{1}{x+1}} = 0$, mentre $\lim_{x\to-1^+} e^{\frac{1}{x+1}} = +\infty$: quindi -1 é un punto di discontinuitá di seconda specie.

(iv)$f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$ é continua su $\mathbf{R}$-$\{0\}$. Infatti su $x \neq 0$ $f(x)$ é continua perché composizione di funzioni continue. In 0 si ha che

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x^2}} = +\infty$$

quindi 0 é un punto di discontinuitá di seconda specie.

(v)$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ é continua su $\mathbf{R}$-$\{0\}$. Infatti su $x \neq 0$ $f(x)$ é continua perché composizione di funzioni continue. In 0 si ha che

$$\lim_{x \to 0^-} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

quindi 0 é un punto di discontinuitá eliminabile o di terza spece..