SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI SUI LIMITI DI FUNZIONI

ESERCIZIO 1

(a) $\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0} e^{x\ln x} = 1$

(b) Poniamo $x = \frac{1}{n}$, quindi

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1) - \ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} -\frac{\ln n}{n} = 0.$$

(c) Poniamo $x = \frac{1}{n}$, quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1.$$

(d)

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln\left(1+\sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x+1}} \cdot \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln\left(1+\sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x-1}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x\to 1^+} \ln\left(1+\sqrt{x-1}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x-1}}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

abbiamo sfruttato il fatto che $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$, quindi il limite notevole $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

(e) Poniamo $e^x - 1 = y$, quindi $x \to 0 \iff y \to 0$. Quindi $x = \ln(y+1)$, sostituendo si ha:

$$\lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(y+1)} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\ln(y+1)^{\frac{1}{y}}} = 1$$

(f)

$$\lim_{x\to 0^+}(1+|\sin x|)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{|\sin x|}}\right)^{\frac{1}{|\sin x|}\cdot\frac{|\sin x|}{x}} = e^1 = e.$$

(g)

$$\lim_{x\to\infty} xe^x \sin\left(e^{-x}\sin\frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(e^{-x}\sin\frac{2}{x}\right)}{e^{-x}\sin\frac{2}{x}}\cdot\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sin\frac{2}{x}\cdot e^x\cdot x,$$

tenendo conto che:
$e^{-x}\sin\frac{2}{x}\to 0$,
$x\sin\frac{2}{x} = 2\frac{x}{2}\sin\frac{2}{x} = 2\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}$,
il limite cercato é 2.

(h)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\sin^2 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{\sin^2 3x} =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x}{\sin 3x}\right)^2\cdot\frac{1}{9} = \frac{2}{9}.$$

(i) Osserviamo innanzitutto che se $x\to 0$, $\pi\cos x\to\pi$, e che $0<\pi\cos x<\pi$ $(\sin x = \sin(\pi - x)\ \forall x\in(0,\pi))$.
Quindi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\cos x)}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi-\pi\cos x)}{\pi-\pi\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\pi\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x}{\sin x} = 1\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 1 = \frac{\pi}{2}.$$

(j) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x(e^{\cos x}-1) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\cos x}-1}{\cos x}\sin x = 1.$

ESERCIZIO 2
(a)

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x}{-x} = -1,$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x} = 1.$$

(b)

$$\lim_{x\to 4^-}[x]\{x\} = \lim_{x\to 4^-}3\{x\} = 3,$$
$$\lim_{x\to 4^+}[x]\{x\} = \lim_{x\to 4^+}4\{x\} = 0.$$

(c)

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x\cos x}{|x|} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x\cos x}{-x} = -1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x\cos x}{|x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\cos x}{x} = +1.$$

$$\lim_{x\to 0^-} |x|^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^-} -x^{\frac{1}{x}} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0^+} |x|^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$