

## Soluzioni degli esercizi sull'uso delle derivate

### Esercizio 1

Poiché la funzione  $\frac{\sin x}{x}$  è continua per ogni  $x \neq 0$ , applichiamo il Teorema della media integrale e otteniamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (2x - x) \frac{\sin \xi}{\xi} \quad \xi \in (x, 2x).$$

Per  $x \rightarrow 0$  anche  $\xi \rightarrow 0$ , quindi, sempre grazie alla continuità della funzione in oggetto, passando al limite si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\sin \xi}{\xi} = 0.$$

### Esercizio 2

Consideriamo la funzione differenza

$$f(x) = \arccos x - 2 \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{2}}$$

voglio provare che  $f(x)$  è sempre identicamente nulla, quindi deriviamola:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 2 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1-x}{2}}} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1-x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot -\frac{1}{2} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x}} \frac{1}{\sqrt{1-x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad \forall x \in [0, 1] \end{aligned}$$

pertanto la funzione è costante e vale

$$f(x) = f(1) = 2k\pi - 2(k\pi) \equiv 0.$$

### Esercizio 3

Applichiamo il Teorema di Rolle alla funzione  $f(x)$  per  $x \in (a, c)$ , dato che la funzione assume lo stesso valore agli estremi dell'intervallo. Il teorema assicura l'esistenza di un punto  $\xi_1 \in (a, c)$  tale che  $f'(\xi_1) = 0$ . Applichiamo di nuovo il teorema di Rolle a  $f(x)$  nell'intervallo  $(c, b)$ , di nuovo sappiamo che esiste un punto  $\xi_2 \in (c, b)$  tale che  $f'(\xi_2) = 0$ . Appliciamo ora lo stesso teorema a  $f'(x)$  nell'intervallo  $(\xi_1, \xi_2)$ , sapendo che agli estremi  $f'$  assume lo stesso valore

(cioé zero!). Possiamo ora dedurre l'esistenza di un punto  $\xi_3 \in (\xi_1, \xi_2)$  tale che  $f''(\xi_3) = 0$ .

#### Esercizio 4

Osserviamo innanzitutto che l'usuale dimostrazione del Teorema di Rolle non può essere usata perché non siamo su un insieme compatto.

Supponiamo che  $a$  ed  $f(a)$  siano positivi (non é restrittivo!). Se la funzione é costante allora la proposizione é banalmente verificata, quindi supponiamo che  $f$  non sia costante. Esisterá un punto  $x_1 > a$  tale che  $f(x_1) \neq f(a)$ , ad esempio  $f(x_1) > f(a)$ . D'altra parte, dalla definizione di limite deduciamo che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 : f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon) \forall x > M$$

e, poiché é vero per ogni  $\varepsilon$  possiamo scegliere  $\varepsilon$  abbastanza piccolo (di conseguenza  $M$  sará molto grande) in modo che

$$(*) \quad f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon < f(x_1), \quad x > M$$

Sia  $x_2$  un punto che verifica (\*). Dato che la funzione é continua, per il Teorema dei valori intermedi, esisterá  $x_3 \in (x_1, x_2)$  tale che  $f(x_3) = f(a)$ . A questo punto possiamo applicare la usuale versione del Teorema di Rolle, nel compatto  $[a, x_3]$ , nel quale  $f$  assume lo stesso valore agli estremi e quindi concludere che esiste  $x_4 \in (a, x_3) \subset (a, +\infty)$  tale che  $f'(x_4) = 0$ .

#### Esercizio 5

Siano rispettivamente  $L(x, x_0) = \sup_{(x, x_0)} g(t)$  e  $l(x, x_0) = \inf_{(x, x_0)} g(t)$ . Si ha ovviamente

$$l(x, x_0) \leq g(x) \leq L(x, x_0) \quad \forall x \in (x, x_0),$$

pertanto, essendo  $p(x) > 0$ ,

$$l(x, x_0) \int_{x_0}^x p(t) dt \leq g(x) \leq L(x, x_0) \int_{x_0}^x p(t) dt \quad \forall x \in (x, x_0).$$

Se  $g(x)$  é anche continua essendo la quantitá

$$\frac{\int_{x_0}^x g(t)p(t) dt}{\int_{x_0}^x p(t) dt}$$

compresa tra gli estremi inferiore e superiore di  $g(x)$ , per il teorema dei valori intermedi questa quantitá sará uguale a  $g(\xi)$  per un certo  $\xi \in (x, x_0)$ , quindi

$$\int_{x_0}^x g(t)p(t) dt = g(\xi) \int_{x_0}^x p(t) dt.$$