SOLUZIONI PRIMO ESONERO DI CAM
13 aprile 2005

Esercizio 1.
Data la funzione

$$f(x) = \cos x e^{\frac{1}{2}\sin x}$$

determinarne: insieme di esistenza, zeri, limiti ed eventuali asintoti, massimi e minimi relativi e tracciarne un grafico approssimativo.
Insieme di esistenza: $\mathbb{R}$, la studiamo tra 0 e 2π dato che é periodica. $f(\frac{\pi}{2}) = 0 = f(\frac{3\pi}{2})$, $f(0) = 1 = f(2\pi)$. Non ci sono asintoti verticali, il limite a $\pm\infty$ non esiste.

$$f'(x) = e^{\frac{1}{2}\sin x}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}sin^2x - \sin x\right) \geq 0 \iff$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}sin^2x - \sin x \geq 0$$

poniamo $y = \sin x$, quindi dobbiamo risolvere la diseq. di secondo grado

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}y^2 - y$$

le soluzioni sono $y = 1 \pm \sqrt{2}$, e, tornando al seno di x, scartiamo $-1-\sqrt{2}$. Quindi $f'(x) \geq 0$ se $\sin x \leq -1+\sqrt{2}$, ovvero, se $\alpha = \arcsin(-1+\sqrt{2})$, $0 \leq x \leq \alpha$ e $\pi - \alpha \leq x \leq 2\pi$. Pertanto $x = \alpha$ é un punto di massimo relativo, $x = \pi - \alpha$ é un punto di minimo relativo.

Esercizio 2.
Dato un triangolo rettangolo avente la somma S dei cateti fissata, trovare quello di ipotenusa minima. Quello

di ipotenusa massima esiste...?
Siano x e $S - x$ i due cateti. L'ipotenusa si puó esprimere conm il T. di Pitagora: $f(x) = \sqrt{x^2 + (S-x)^2} = \sqrt{2x^2 - 2Sx + S^2}$.

$$f'(x) = \frac{2x - S}{\sqrt{2x^2 - 2Sx + S^2}} \geq 0 \iff x > \frac{S}{2}.$$

Pertanto $x = \frac{S}{2}$ é un minimo. Per quanto riguarda l'ipotenusa massima, si puó osservare che essa non esiste, cioé la funzione assume un sup e non un massimo. Infatti si ottiene l'ipotenusa massima se la figura diventa degenere, ovvero l'ipotanusa tende alla somma dei cateti S, quindi il triangolo si schiaccia e diventa un segmento.

Esercizio 3.
Dire se la segunte fuzione é uniformemente continua nei domini indicati:

$$f(x) = \frac{e^x \cos x}{x^2} \quad x \in (-\infty, -1],\ x \in (0, 1).$$

La funzione é u.c. nel primo insieme in quanto ammette un asintoto orizzontale:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$

Nel secondo insieme non é u.c. perché é illimitata per $x \to 0^+$.

Esercizio 4.
Dire quante sono le radici reali del polinomio

$$P(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} - 10x + 100, \quad n \text{ intero, dispari.}$$

Poiché $n + 1$ é pari, $\lim_{x \to \pm\infty} P(x) = +\infty$. Osserviamo che n é sicuramente positivo, visto che é il GRADO del polinomio!! Derivando otteniamo che il punto $x = \sqrt[n]{10}$ é un minimo assoluto. Vogliamo provare che il minimo é strettamente positivo, quindi questo basterá per concludere che $P(x)$ non ha radici reali.

$$P(\sqrt[n]{10}) = \frac{10^{\frac{n+1}{n}}}{n+1} - 10 \cdot 10^{\frac{1}{n}} + 100 = 100 - \frac{n}{n+1} 10^{\frac{n+1}{n}}.$$

Osserviamo che $\frac{n+1}{n} \leq 2$ quindi $-10^{\frac{n+1}{n}} \geq 100$. Applicando questa stima si ottiene

$$P(\sqrt[n]{10}) \geq 100 - \frac{n}{n+1} 100 > 0.$$

Esercizio 5.
Siano f e g due funzioni derivabili, enunciare la regola di derivazione della funzione composta $f \circ g$. Sia f una fuzione invertibile con inversa derivabile, enunciare la regola della derivata della funzione f^{-1}.
Dare la definizione di punto di massimo relativo per una funzione.
Dare la definizione di funzione uniformemente continua.
Enunciare una condizione necessaria e sufficiente affinché una fuzione continua in un intervallo aperto limitato sia in esso uniformemente continua.
Dare una esempio di:
una funzione che sia uniformemente continua in $(0, 1)$;
una funzione che sia uniformemente continua in $[1, +\infty)$;
una funzione che non sia uniformemente continua in $[1, +\infty)$.

Diamo le risposte solo ad alcuni quesiti (gli altri si possono trovare in qualunque libro di analisi!):
Enunciare una condizione necessaria e sufficiente affinché

una fuzione continua in un intervallo aperto limitato sia in esso uniformemente continua: una funzione f continua in un intervallo aperto é in esso anche u.c. se e solo se esiste un'estensione continua di f alla chiusura dell' intervallo.
una funzione che sia uniformemente continua in $(0, 1)$: $f(x) = \sin x$
una funzione che sia uniformemente continua in $[1, +\infty)$: $f(x) = \sin x$
una funzione che non sia uniformemente continua in $[1, +\infty)$: $f(x) = x^2$.