

8. ESERCIZI SUI LIMITI DI FUNZIONI

UNA LISTA DI LIMITI NOTEVOLI DA UTILIZZARE:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^{\frac{1}{x}} = 1 \quad \forall a > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log x)^\alpha}{x^\beta} = 0 \quad \alpha, \beta > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x)^\alpha}{a^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +, -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\log(1+x)}{x}\right) = 1$$

ESERCIZIO 1 Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$;

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$;

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$;

- (d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(1+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x^2-1}}$;
- (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x}$;
- (f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + |\sin x|)^{\frac{1}{x}}$;
- (g) $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^x \sin\left(e^{-x} \sin \frac{2}{x}\right)$;
- (h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{\sin^2 3x}$;
- (i)(*) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \cos x)}{x \sin x}$;
- (j) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x (e^{\cos x} - 1)$;
- (k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan^3 x - 1}}{x(\cos x - e^{x^2})}$;
- (l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$;
- (m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tan x + (1 - \cos 2x) \sin^2 x}{27x^4 + 5 \sin x}$;

ESERCIZIO 2

Verificare che i seguenti limiti non esistono:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$;
- (b) $\lim_{x \rightarrow 4} [x]\{x\}$, dove $\{\cdot\}$ indica la funzione parte frazionaria;
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{|x|}$;
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{\frac{1}{x}}$.